UNIVERZITET CRNE GORE

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Marko Marković

Kompresivno odabiranje u rekonstrukciji biomedicinskih slika

-Magistarski rad-

Podgorica, 2023. godine

PODACI I INFORMACIJE O MAGISTRANDU

Ime i prezime: Marko Marković

Datum i mjesto rođenja: 10.04.1998. godine, Cetinje, Crna Gora

Naziv završenog osnovnog studijskog programa i godina završetka studija:
Elektronika, telekomunikacije i računari, 2019. godine

Naziv završenog specijalističkog studijskog programa i godina diplomiranja:
Elektronika, 2020. godine

INFORMACIJE O MAGISTARSKOM RADU

Naziv postdiplomskog studija: Akademske magistarske studije elektronike

Naslov rada: Kompresivno odabiranje u rekonstrukciji biomedicinskih slika

Fakultet na kojem je rad odbranjen: Elektrotehnički fakultet, Podgorica

UDK, OCJENA I ODBRANA MAGISTARSKOG RADA

Datum prijave magistarskog rada: 09.11.2022. godine

Datum sjednice Vijeća na kojoj je prihvaćena tema: 22.02.2023. godine

Komisija za ocjenu teme i podobnosti magistranda:

1. Prof. dr Srđan Stanković
2. Prof. dr Irena Orović
3. Doc. dr Anđela Draganić

Mentor: Prof. dr Irena Orović

Komisija za ocjenu rada:

1. Prof. dr Srđan Stanković
2. Prof. dr Irena Orović
3. Doc. dr Anđela Draganić

Komisija za odbranu rada:

1. Prof. dr Srđan Stanković
2. Prof. dr Irena Orović
3. Doc. dr Anđela Draganić

Datum odbrane: 06.07.2023. godine

ETIČKA IZJAVA

U skladu sa članom 22 Zakona o akademskom integritetu i članom 24 Pravila studiranja na postdiplomskim studijama, pod krivičnom i materijalnom odgovornošću, izjavljujem da je magistarski rad pod naslovom

"Kompresivno odabiranje u rekonstrukciji biomedicinskih slika"

moje originalno djelo.

Podnosilac izjave,

Marko Marković, Spec. Sci

Sažetak

Kompresivno odabiranje je jako popularna tehnika u obradi signala koja svoju primjenu ima u raznim oblastima ljudske djelatnosti, od prirodnih nauka, preko medicine do umjetnosti. Teorija kompresivnog odabiranja kaže da se određeni signal može rekonstruisati na osnovu malog broja nasumično odrađenih mjerenja ako taj signal zadovoljava uslove rijetkosti i inkoherencije. U literaturi postoji veliki broj algoritama koji se primjenjuju nad različitim signalima, a u zavisnosti od tipa signala, postoje pogodni transformacioni domeni u kojima signal iskazuje svojstvo rijetkosti.

Zbog neophodnosti da kvalitet biomedicinskih slika bude na zadovoljavajućem nivou, pacijenti su često izloženi relativno dugom i neprijatnom procesu snimanja. Sama priroda procedure snimanja često zahtijeva i izlaganje jonizijućem zračenju, što može imati negativan uticaj na zdravlje ljudi.

Da bi se smanjilo vrijeme izlaganja navedenom procesu, kompresivno odabiranje se može iskoristiti u cilju smanjenja vremena koje pacijent provede na snimanju, imajući u vidu da može obezbijediti zadovoljavajući kvalitet slike iz smanjenog broja prikupljenih mjerenja. Kao jedna od metoda koja rješava slučaj rekonstrukcije signala iz smanjenog broja mjerenja u uslovima koje zahtijeva kompesivno odabiranje, pristup naizmjenične metode množitelja (*alternating direction method of multipliers*), koji rješava probleme konveksne optimizacije, će biti prilagođen da radi sa oštećenim biomedicinskim slikama koristeći različite minimizacione norme (ℓ_{21}-norma i TV minimizacija) i transformacione domene.

U radu će biti testirane sve varijante navedenih normi i transformacionih domena, radi nalaženja najboljeg rješenja za svaki tip slika. Svrha rada je da pokaže da pristup kompresivnog odabiranja može dati značajan doprinos u analizi biomedicinskih slika, omogućavajući njihovu rekonstrukciju iz relativno malog broja mjerenja, čime se omogućava skraćenje procedure snimanja pacijenta. Važno je napomenuti da skraćenje procedure snimanja ne utiče na kvalitet slike, pa samim tim ni na rezultate dijagnostičkih procesa.

Ključne riječi: kompresivno odabiranje, biomedicinske slike, naizmjenična metoda množitelja, minimizacione norme, transformacioni domeni.

Abstract

Compressive sensing is a very popular technique in signal processing that has its applications in various fields of human activity, from natural sciences, over medicine, to art. The theory of compressive sensing states that a certain signal can be reconstructed based on a small number of randomly performed measurements, if that signal satisfies the conditions of sparsity and incoherence. In the literature, there are a large number of algorithms that are applied to different signals, and depending on the type of signal, there are suitable transformation domains in which the signal exhibits the property of sparsity.

Due to the necessity for the quality of biomedical images to be at a satisfactory level, patients are often exposed to a relatively long and unpleasant imaging process. The very nature of the imaging procedure often requires exposure to ionizing radiation, which can have a negative impact on people's health.

In order to reduce the time of exposure to the mentioned process, compressive sensing can be used to reduce the time the patient spends on imaging process, bearing in mind that it can provide satisfactory image quality from the reduced number of collected measurements. As one of the methods that solves the case of signal reconstruction from a reduced number of measurements in conditions that require compressive sensing, the alternating direction method of multipliers, which solves convex optimization problems, will be adapted to work with damaged biomedical images using different minimization norms (ℓ_{21}-norm and TV minimization) and transformation domains. In this paper, all variants of the mentioned norms and transformation domains will be tested, in order to find the best solution for each type of images.

The purpose of the paper is to show that the approach of compressive sensing can make a significant contribution to the analysis of biomedical images, enabling their reconstruction from a relatively small number of measurements, thus enabling the shortening of the patient imaging procedure. It is important to note that shortening the imaging procedure does not affect the quality of the image, and thus the results of diagnostic processes.

Keywords: compressive sensing, biomedical images, alternating direction method of multipliers, minimization norms, transformation domains.

Sadržaj

Spisak slika

Spisak tabela

1 Uvod

U današnjem svijetu, kojeg karakteriše razvoj novih tehnologija i digitalna transformacija gotovo svih domena ljudskog djelovanja, postoji stalna potreba za generisanjem, prenošenjem, procesuiranjem i skladištenjem podataka. U te svrhe se koriste razni uređaji i senzori koji generišu velike količine digitalnih podataka za čiju su transmisiju, obradu i čuvanje potrebni značajni resursi. Ovo je zajednički problem sistema koji se bave prikupljanjem radarskih, biomedicinskih, multimedijalnih i drugih podataka, jer pored toga što mogu biti memorijski zahtjevni, mogu biti i vremenski neefikasni. Tradicionalno, signali su se rekonstruisali na osnovu matematičkog formalizma koji definiše teorema o odabiranju, što je rezultiralo velikim brojem odbiraka koje treba skladišiti. Postavlja se pitanje da li je moguće smanjiti broj potrebnih odbiraka, a da to smanjenje ne utiče na kvalitet rekonstrukcije. Odgovor je pozitivan, i dolazi u vidu pristupa kompresivnog odabiranja (*compressive sensing*), koje kaže da se signal može rekonstruisati na osnovu mnogo manjeg broja nasumičnih mjerenja ukoliko zadovoljava uslove rijetkosti i inkoherencije. U literaturi postoji veliki broj algoritama koji se primjenjuju nad različitim signalima, a u zavisnosti od tipa signala, postoje pogodni transformacioni domeni u kojima signal iskazuje svojstvo rijetkosti. Samim tim što se signal rekonstruiše na osnovu malog broja mjerenja, koji je znatno manji od dimenzija signala, problem se zasniva na rješavanju neodređenog sistema jednačina koji ima beskonačno mnogog rješenja. U tu svrhu se koristi jako veliki broj optimizacionih algoritama koji pokušavaju da nađu tačno rješenje i koji su različitog nivoa kompleksnosti i računske izvodljivosti. Često se pojavljuju novi algoritmi i pristupi, koji predstavljaju unapređenje nekih postojećih algoritama, koji teže da postignu bolje performanse i kraće vrijeme izvršavanja.

Od velikog broja raznih pristupa koji rješavaju probleme kompresivnog odabiranja, pristup naizmjenične metode množitelja rješava probleme konveksne optimizacije tako što zadati problem razbija na niz manjih djelova koje je pojedinačno lakše riješiti. Osnovni princip se zasniva na dekompoziciji problema, nakon čega se rješenja podproblema koordinišu da bi se našlo globalno rješenje problema. Ovaj pristup je svoju široku primjenu našao i kod mašinskog učenja, statistike, pametnih električnih mreža, optimizacionih problema, aplikacijama sa velikim brojem podataka.

Biomedicinske slike su od enormnog značaja u medicini jer daju uvid u unutrašnjost tijela, te predstavljaju bitnu dijagnostičku tehniku koja je u stanju da otkrije brojne abnormalnosti kao što su prelomi kostiju i promjene u tkivima i organima. Najčešće korišćene metode za generisanje biomedicinskih slika su magnetna rezonantna tomografija, kompjuterizovana tomografija i tehnika x-zraka. Kako je neophodno da kvalitet biomedicinskih slika bude na zadovoljavajućem nivou, snimanja su često dugotrajna, pa pacijenti mogu osjetiti nelagodu ili se od njih može zahtijevati da duže vremena miruju u određenom položaju, što može biti zahtjevno za neke pacijente i može dovesti do neuspješnog rezultata snimanja. Sam proces snimanja raznim biomedicinskim uređajima, pored toga što je neprijatan za pacijente, može biti i štetan zbog same prirode postupka (npr. kompjuterizovana tomografija) koja uključuje zračenje koje je jonizujućeg tipa, pa izlaganje takvom tipu zračenja povećava vjerovatnoću pojave raka, te je poželjno da se minimizuje doza radijacije kojom je pacijent izložen.

U ovom radu će biti istraživana mogućnost primjene pristupa kompresivnog odabiranja u procesu analize i obrade biomedicinskih slika. Posebna pažnja će biti posvećena metodu naizmjeničnih množitelja (*alternating direction method of multipliers*), kao jednom od pristupa koji se koriste za rekonstrukciju oštećenih signala u uslovima kompresivnog odabiranja. Slike će imati različite stepene oštećenja, kao i različitu rezoluciju, od niske do visoke rezolucije. Pristup naizmjenične metode množitelja će biti prilagođen da radi sa oštećenim slikama,tako što će se testirati različite minimizacione norme u cilju traženja najoptimalnije za datu aplikaciju. Takođe, testiraće se i različiti transformacioni domeni sa ciljem traženja domena koji će omogućiti najkoncizniju predstavu za određeni tip biomedicinske slike. Biće detaljno analizirane sve varijante radi nalaženja najboljeg rješenja za svaki tip slika.

Svrha rada je da se pokaže da tehnikom kompresivnog očitavanja, kroz naizmjeničnu metodu množitelja, može skratiti proces kojim se stvara biomedicinska slika, a da to skraćenje ne utiče značajno na kvalitet slike jer je kvalitet biomedicinske slike od esencijalne važnosti radi dijagnostifikacije raznih stanja kod pacijenata (prelomi, tumori, krvarenja itd.). Uz skraćenje procesa, pacijent je manje izložen jonizujućem zračenju, što je značajan benefit.

Rad je organizovan na sljedeći način. Drugo poglavlje opisuje proceduru kompresivnog odabiranja, potrebnih uslova za njegovu realizaciju, kao i pregled najčešće korišćenih matematičkih transformacija i minimizacionih normi, sa njihovim primjenama u realnim aplikacijama. Treće poglavlje opisuje vrste biomedicinskih slika, metode njihove akvizicije i značaj biomedicinskih slika u dijagnostici. Četvrto poglavlje daje uvid u najčešće korišćene rekonstrukcione algoritme, sa neophodnim matematičkim formalizmom i načinom njihovog funkcionisanja. U njemu će poseban osvrt biti na opisu i definisanju rada pristupa naizmjenične metode množitelja. U petom poglavlju će biti izloženi eksperimentalni rezultati dobijeni primjenom metoda naizmjeničnih množitelja, koji je prilagođen radu sa pojedinim tipovima biomedicinskih slika. Detaljno će biti analizirane sve varijante minimizacionih normi i transfomacionih domena, da bi se za svaki tip slike utvrdio najpogodniji pristup. U posljednjem, šestom poglavlju, će biti iznesen zaključak na osnovu teorijskih očekivanja i eksperimentalnih rezultata, i utvrditi praktičnost primjene kompresivnog odabiranja kroz naizmjeničnu metodu množitelja nad oštećenim biomedicinskim slikama.

2 Kompresivno odabiranje

U komunikacijama, sam proces prikupljanja podataka (odbiraka) nekog signala je definisan pionirskim radovima Koteljnika (*Vladimir Kotelnikov*), Šenona (*Claude Shannon*), Nikvista (*Harry Nyquist*) i Vitakera (*Edmund Whittaker*)[1]. Na osnovu ovih radova je definisana fundamentalna teorema u komunikacijama, Šenon-Nikvistova teorema o odabiranju. Ona definiše potrebne uslove za tačnu rekonstrukciju uzorkovanog signala. Prema ovoj teoremi, signal od interesa se može tačno rekonstruisati ukoliko je frekvencija odabiranja bar dva puta veća od maksimalne frekvencije signala, tj. $f_s \geq 2f_{max}$. Ukoliko je ovaj uslov ispunjen, signal se može rekonstruisati na osnovu prikupljenih odbiraka. Ovakav način odabiranja signala rezultira postojanjem velikog broja odbiraka, pogotovo ako je u pitanju visoko frekventni signal.

Tradicionalno odabiranje signala je dugo vremena bilo standard kada je uzorkovanje i mjerenje u pitanju, pa da bi se uštеđelo na transmisionim i smještajnim resursima, nad prikupljenim odbircima bi se izvršila kompresija do zadovoljavajućeg nivoa putem raznih matematičkih algoritama za kompresiju podataka. Ovi algoritmi su dominantno bili bazirani na pretpostavci da većina signala u sebi sadrži veliku količinu nepotrebnih informacija čije bi skladištenje značilo rasipanje sa memorijskim resursima, a bez kojih bi se zadržao željeni kvalitet signala, jer su ljudska čula ograničene rezolucije i neke degradacije na signalu bi prošle nezapaženo. Takođe, kompleksnost samih kompresionih algoritama je uslovljena i poznavanjem određenih specifičnosti odabiranih signala, kao na primjer da neki signal u određenom transformacionom domenu ima mnogo kompaktniju predstavu u odnosu na vremenski domen, pa se samim veliki broj odbiraka može zanemariti.

Prethodno opisani proces se može sumirati na sljedeći način. Posmatrani signal se odabira, pa nakon odabiranja se kompresuje kompresionim algoritmima i onda šalje transmisionim medijumom ili se čuva u memoriji. Dakle, kompresija dolazi nakon odabiranja, kada se većina prikupljenih informacija odbaci. Odbacivanje velikom broja odbiraka nakon kompresije upućuje na pitanje da li je potreban toliki broj mjerenja (tj. senzora koji u tu svrhu služe), kao i da li je moguće smanjiti vrijeme akvizicije signala ukoliko je moguće smanjiti broj odbiraka potrebnih za uspješnu rekonstrukciju.

Odgovor na prethodno postavljeno pitanje se, ne tako davno, pojavio u obliku kompresivnog odabiranja (za kompresivno odabiranje će biti korišćena skraćenica CS), novog pristupa u akviziciji i obradi signala, koji može promijeniti nači dizajniranja senzora i koji drastično smanjuje potrebu za brojem odbiraka koju definiše Šenon-Nikvistova teorema. Samim tim se i smanjuju potrebe za memorijskim, transmisionim i računskim resursima. Kompresivno odabiranje može prevazići nedostatke tradicionalnog načina odabiranja, zasnovanog na teoremi o odabiranju, jer se procedura kompresije podataka obavlja pri samoj proceduri odabiranja, a ne nakon procesa odabiranja kako se obavljalo u tradicionalnom pristupku. Takođe, CS otvara mogućnost za pojednostavljenje skupih sistema i aparata za prikupljanje/akvizaciju podataka kao što su kamere sa visokom rezolucijom, MRI skeneri, PET skeneri... Vrijeme prikupljanja podataka se može drastično smanjiti u određenim aplikacijama, što je od velike koristi, pogotovo kod MRI skenera gdje se smanjuje vrijeme izlaganja pacijenata radijaciji.

Teorija komprimovanog očitavanja kaže da se neki signal koji želimo da rekonstruišemo može rekonsturisati koristeći mali broj nasumice odabranih odbiraka onda kada taj signal ima kompaktnu (rijetku) reprezentaciju u nekom transformacionom domenu. Pojam kompaktnosti (*sparsity)* signala znači da se taj signal, najčešće u transformacionom domenu, može predstaviti sa malim brojem nenultih koeficijenata, što pogoduje kompresibilnosti signala i smanjenju memorijske upotrebe. Uz svojstvo rijetkosti, bitan uslov za uspješnu rekonstrukciju je i inkoherencija, tj. da mjerenja budu linearno nezavisna. Što je veći stepen inkoherencije, to je potrebno manje mjerenja da bi se uspješno rekonstruisao signal [2].

Ukoliko je proces prikupljanja odbiraka linearan, onda se problem rekonstrukcije na osnovu prikupljenih podataka svodi na rješavanje sistema linearnih jednačina. Posmatrajmo neki signal $\mathbf{f}$ sa N odbiraka i pretpostavimo da se mjerni proces modeluje matricom mjerenja $\mathbf{\Phi}$. Proces mjerenja nad signalom $\mathbf{f}$ se predstavlja kao problem rekonstrukcije koristeći M mjerenja:

$$\mathbf{\Phi f} = \mathbf{y}, \tag{2.1}$$

gdje je $\mathbf{y}$ vektor mjerenja signala $\mathbf{f}$.

Gledajući tradicionalan pristup odabiranja, broj mjerenja i dužina signala bi morali biti jednaki ($M = N$). Ono što nam teorija komprimovanog odabiranja omogućava za uspješnu rekosntrukciju jeste da uzmemo M nasumice odabranih mjerenja pri čemu je taj broj nasumice odabranih mjerenja mnogo manji od dužine signala ($M \ll N$). Samim tim, rekonstrukcija signala je moguća koristeći samo mali broj odbiraka [3].

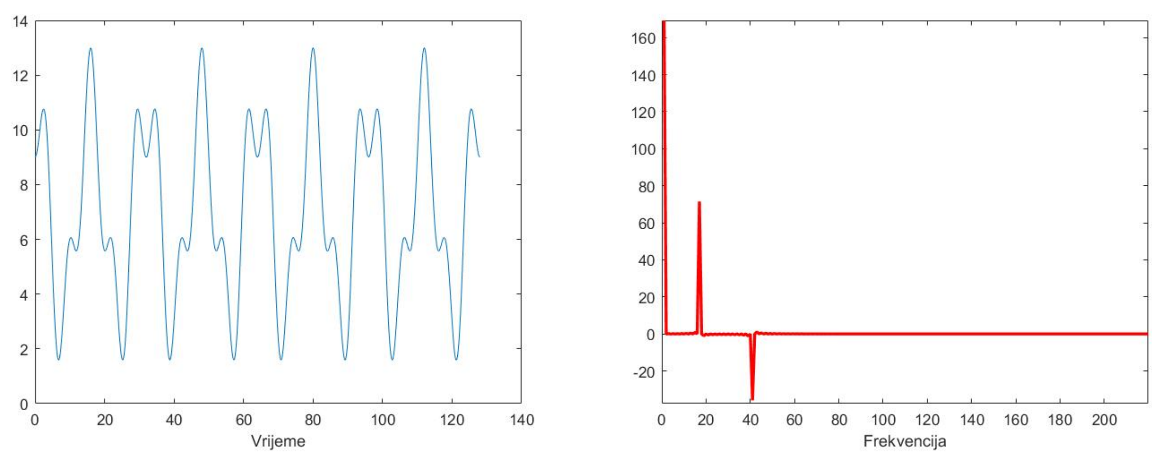
Postoji nekoliko standardnih algoritma za minimizaciju greške koji se koriste kod komprimovanog odabiranja, među kojima su algoritmi zasnovani na ℓ_1 minimizaciji, *greedy* algoritmi...

2.1 Osobina rijetkosti

Za većinu realnih signala možemo reći da imaju svojstvo rijetkosti (kompaktnosti) ukoliko su predstavljeni u pogodnom transformacionom domenu.

Signal ima osobinu rijetkosti ako se u određenom transformacionom domenu može predstaviti sa malim brojem nenultih odbiraka, dok su vrijednosti svih ostalih odbiraka jednake nuli. Taj mali broj nenultih koeficijenata je mnogo manji od dužine signala. Ukoliko signal ima veći broj nenultih koeficijenata u transformacionom domenu, a većina tih koeficijenata ima vrijednost blisku nuli, onda taj signal takođe ima osobinu rijetkosti jer se vrijednoti tih koeficijenata mogu aproksimirati nulom ili zanemariti [2],[4]. Signali sa osobinom rijetkosti su kompresibilni signali.

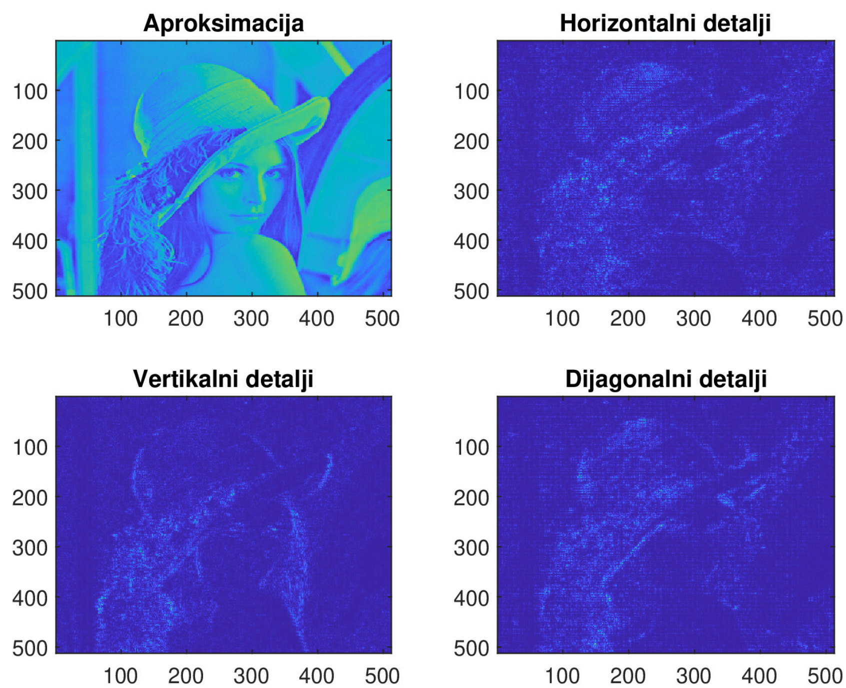
Da su za signal bitne informacije sadržane u malom broju koeficijenata ilustruje primjer signala $y = 7 + 4cos(2\pi t f_1) - 2cos(2\pi t f_2)$, gdje su $f_1 = \frac{8}{N}$, $f_2 = \frac{20}{N}$, $t = 0 : 0.1 : N$ i $N = 128$. Na slici 2.1 je dat prikaz navedenog signala u vremenskom domenu i tog istog signala nakon primjene diskretne kosinusne transfromacije (kod dat u prilogu rada). Jasno je da je signal rijedak u navedenom transformacionom domenu zbog malog broja nenultih odbiraka u tom



(a) (b)

Slika 2.1: Na slici (a) je predstavljen signal u vremenskom domenu, a na slici (b) u transformacionom domenu (DCT) domenu.

Još jedan ilustrativan primjer osobine rijetkosti kod signala se može vidjeti na slici 2.2 gdje je uzeta slika Lene (u prostornom domenu), nad kojom je izvršena Wavelet transformacija (kod je dat u prilogu rada), gdje su dati horizontalni, vertikalni i dijagonalni detalji. Primjetno je da je jako veliki broj koeficijenata taman, tj. ili su nula ili ih aproksimiramo nulom. Slike u opštem slučaju nemaju rijetku reprezentaciju niti u jednom domenu, ali se često može naći domen u kom većina koeficijenata slike imaju jako malu vrijednost, koja se može aproksimirati nulom.



Slika 2.2: Wavelet tranformacija Lena slike, sa detaljima

Kada se nađe pogodan transformacioni domen i kada se dobije rijetka reprezentacija signala, tada se odbirci mogu nazvati mjerenjima (obzervacijama). Realne signale konačne dužine predstavljamo vektorima u n-dimenzionom Euklidskom prostoru, oznake R^n. Posmatrajmo signal *f(n)* koji ima N odbiraka. Ovaj signal možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju ortonormalnih funkcija koje u transformacionom domenu čine bazu:

$$f(n) = \sum_{j=1}^{N} x_j \psi_j(n) \quad ili : \mathbf{f} = \Psi \mathbf{x}. \tag{2.2}$$

U vektoru $\mathbf{x}$ se nalazi niz pozicija koje imaju nenulte vrijednosti:

$$supp(\mathbf{x}) := \{n \in (1, ..., N) : x_n \neq 0\}. \tag{2.3}$$

Neka je K broj nenultih koeficijenata vektora $\mathbf{x}$ i neka je $K \ll N$. Tada možemo reći da je signal rijedak sa stepenom rijetkosti K (K-rijedak).

Prednosti predstavljanja signala u odgovarajućem transfomacionom domenu (Wavelet, DCT, DFT...) se najbolje ogledaju u njihovoj rijetkoj reprezentaciji. Ovu osobinu koriste kompresioni algoritmi. Naime, kodiranje se obavlja za K najbitnijih koeficijenata , dok se preostalih $N - K$ mogu zanemariti i njihove vrijednosti se postavljaju na nulu [2],[5]. Kako su kompresioni algoritmi zasnovani na perceptualnim karakteristikama ljudskog čulnog aparata, to odabir K najznačajnijih koeficijenata (tj. koeficijenata koji imaju najveće amplitude u određenom transformacionom domenu) neće dovesti do primjetnih narušavanja kvaliteta signala. Vektor $\mathbf{x}$ je K-rijedak ukoliko u njemu ima K nenultih koeficijenata:

$$\|\mathbf{x}\|_0 := card\{supp(\mathbf{x})\} \leq K, \tag{2.4}$$

gdje je

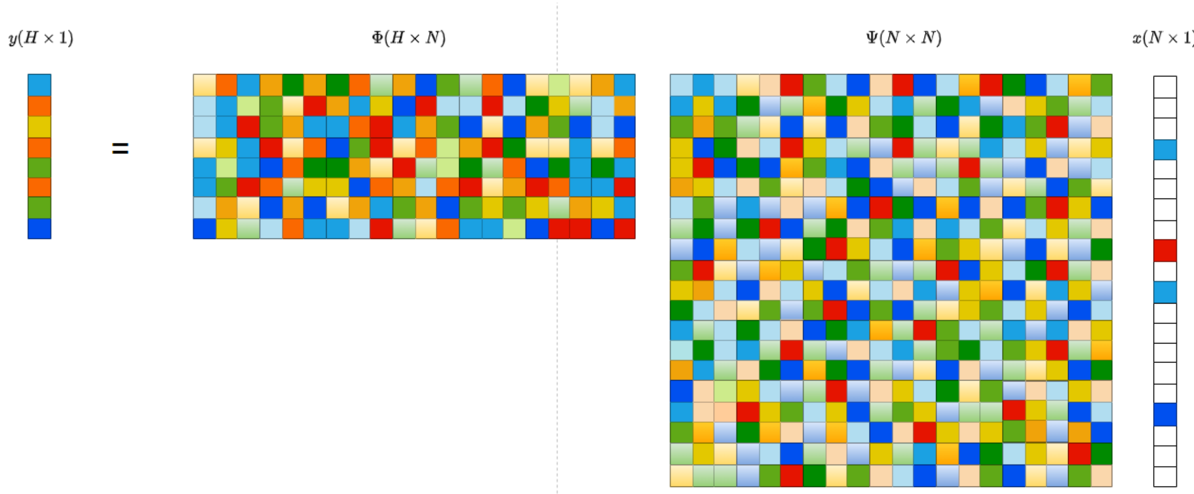
$$\|\mathbf{x}\|_0 := \lim_{p \to 0} \sum_{j=1}^{N} |x_j|^p = \sum_{j=1; x_j \neq 0}^{N} 1 = K. \tag{2.5}$$

Kombinujući jednakosti (2.1) i (2.2) dobijamo da je:

$$\mathbf{y} = \Phi \Psi \mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{x}. \tag{2.6}$$

Može se vidjeti da je vektor mjerenja $\mathbf{x}$ dužine H odbiraka a da je matrica $\mathbf{F}$ dimenzija ($H \times N$). Gledajući jednakost (2.6), zaključuje se da imamo H lineranih jednačina sa N nepoznatih u vektoru $\mathbf{x}$. Samim tim ovaj sistem može imati beskonačno mnogo rješenja. Grafička predstava formulacije (2.6) se može vidjeti na slici 2.3.

U pomoć pristiže činjenica da većina koeficijenata u vektoru $\mathbf{x}$ imaju vrijednost nula, pa je neophodno odrediti samo nenulte komponente. U realnim situacijama, pozicije ovih nenultih koeficijenata nijesu poznate, pa se za rješavanje neodređenog sistema definisanog sa relacijom



Slika 2.3: Grafička reprezentacija fomulacije $\mathbf{y} = \Phi\Psi\mathbf{x}$

(2.6) može koristiti metoda:

$$min\|\mathbf{x}\|_0 \quad pod \quad uslovom \quad \mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}, \tag{2.7}$$

gdje $\|\mathbf{x}\|_0$ predstavlja ℓ_0-normu definisanu kao broj nenultih koeficijenata u vektoru $\mathbf{x}$. Pošto je ℓ_0-norma nekonveksna, a nekonveksni optimizacioni problemi su računski teško tačno rješivi, efikasniji pristup bi bio koristiti konveksnu ℓ_1-normu definisanu kao:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |x_j|, \tag{2.8}$$

u kojoj je minimizacija bazirana na ℓ_1-normi definisana na sljedeći način:

$$min\|\mathbf{x}\|_1 \quad pod \quad uslovom \quad \mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}. \tag{2.9}$$

Navedeni optimizacioni problem se može riješiti linearnim programiranjem zbog već napomenute konveksne osobine ℓ_1-norme [6]. Linearno programiranje predstavlja metodu za postizanje najboljeg ishoda u nekom matematičkom modelu čiji su zahtjevi predstavljeni linearnim odnosima.

Relacija (2.9) je izvedena pod pretpostavkom da kod signala nije prisutan šum, što nije slučaj u većini realnih aplikacija, pa je neophodno uzeti u obzir uticaj šuma. Tada jednačina

(2.6) poprima sljedeći oblik:

$$\mathbf{y} = \Phi\Psi\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{e}, \tag{2.10}$$

gdje $\mathbf{e}$ predstavlja grešku čija je energija ograničena nivoom šuma $\|\mathbf{e}\|_2 = \varepsilon$. Sada upotpunjena formulacija (2.9) izgleda:

$$min\|\mathbf{x}\|_1 \;\; pod \;\; uslovom \;\; \|\mathbf{y} - \mathbf{F}\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon. \tag{2.11}$$

Ukoliko $\mathbf{y} - \mathbf{F}\mathbf{x}$ ostane ispod nivoa šuma, rekonstrukcija će biti uspješna, tj. rekonstruisani signal će biti konzistentan sa originalnim signalom.

2.1.1 Normirani vektorski prostori

U slučaju konačnog prostora, signale možemo predstaviti kao vektore u n-dimenzionom Euklidskom prostoru (R^n) [1]. Kada imamo posla sa vektorima u R^n prostoru, najčešće se koriste ℓ_p-norme, koje su definisane za $p \in [1, \infty]$ kao:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty) \\ max_{j=1,2,\ldots,n}|x_j|, & p = \infty \end{cases} \tag{2.12}$$

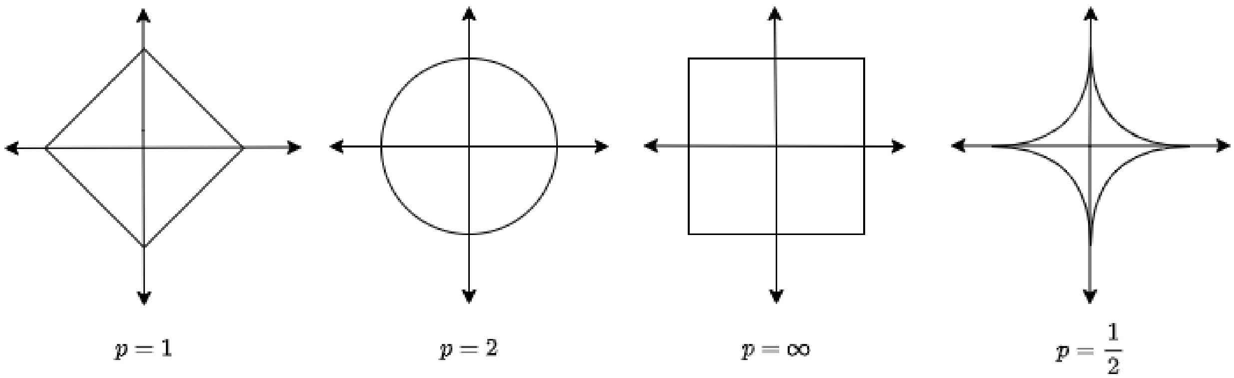
U Euklidskom prostoru uzimamo u obzir i standardni unutrašnji proizvod koji definišemo na sljedeći način:

$$\left\langle x, z \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j z_j. \tag{2.13}$$

Unutrašnji proizvod vodi do ℓ_2-norme kao $\|x\|_2 = \sqrt{\left\langle x, x \right\rangle}$. Geometrijski prikaz ℓ_p-normi je dat na slici 2.4.

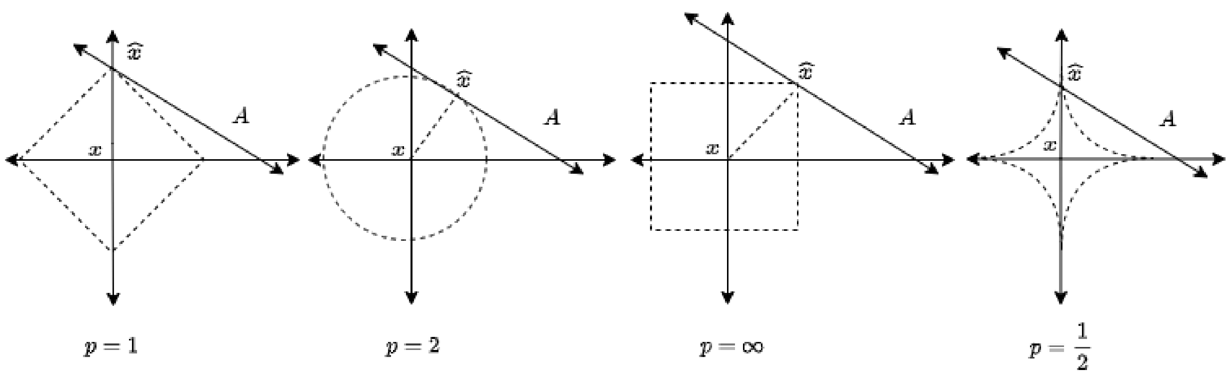
U nekim situacijama je korisno proširiti ℓ_p-normu na slučaj kad je $p < 1$. U ovom slučaju norma definisana formulacijom (2.12) ne ispunjava nejednakost trougla, pa se naziva kvazinormom.

Norme se tipično koriste kao mjera jačine signala ili kao veličina greške. Kao primjer uzmimo signal $x \in R^2$ koji želimo da aproksimiramo koristeći tačku u jednodimenzionalnom prostoru A. Ako mjerimo grešku aproksimacije koristeći ℓ_p-normu, onda se problem svodi na nalaženje $\widehat{x} \in A$ koje minimizuje $\|x - \widehat{x}\|_p$. Odabir broja norme p će imati značajan uticaj na



Slika 2.4: Geometrijska predstava ℓ_p-normi u R^2 prostoru sa $p = 1, 2, \infty$ i sa kvazinormom $p = \frac{1}{2}$

aproksimaciju greške, što je i ilustrovano na slici 2.5. Može se primijetiti da veća vrijednost broja norme p ravnomjernije raširuje grešku između dva koeficijenta, dok manje p daje grešku koja je neravnomjernije ditribuirana i teži biti rijetka [1]. Ovakav zaključak se generalizuje na više dimenzija i ima bitnu ulogu u teoriji komprimovanog odabiranja.



Slika 2.5: Aproksimacija koristeći ℓ_p-normu sa $p = 1, 2, \infty$ i sa kvazinormom $p = \frac{1}{2}$

Istorijski gledano, korišćenje ℓ_1 minimizacije na nekim većim problemima je postalo praktično sa porastom moći računara krajem sedamdesetih godina prošlog vijeka. U jednoj od prvih aplikacija, gdje je ustanovljeno da se geofizički signali mogu rekonstruisati samo na osnovu komponenti na viskom frekvencijama, ℓ_1 minimizacija se pokazala jako korisnom [7]. U toku devedestih godina se ℓ_1 minimizacija počinje sve više koristiti kod obrade signala radi nalaženja rijetkih aproksimacija kod signala i slika.

Na osnovu prethodno rečenoga, postoji dovoljan broj razloga koji idu u prilog tvrđenju da će ℓ_1 minimizacija obezbijediti tačan metod za rekonstrukciju rijetkog signala, što je od velikog značaja za CS.

Postoji varijanta kombinovanja dvije norme u jednoj. Najtipičniji predstavnici ove varijante su $\ell_{1,2}$ i $\ell_{2,1}$ minimizacije, gdje se prvo izvršava norma definisana sa prvim navedenim indeksom, a nakon toga se izvršava norma navedena sa drugim indeksom.

Uzmimo za primjer $\ell_{2,1}$ minimizaciju. Za neku proizvoljnu matricu $\mathbf{A} \in R^{g \times h}$, $\ell_{2,1}$-norma se definiše kao:

$$\|\mathbf{A}\|_{2,1} = \sum_{i=1}^{g} \sqrt{\sum_{j=1}^{h} \mathbf{A}_{ij}^2}. \tag{2.14}$$

Prvo se primijeni ℓ_2-norma duž kolona matrice $\mathbf{A}$ da bi se dobio g-dimenzioni vektor, nakon čega se primijeni ℓ_1-norma nad dobijenim vektorom radi dobijanja realnog broja [8].

2.1.2 TV minimizacija

Total Variation (TV) metoda je često korišćena minimizaciona tehnika u obradi signala, posebno kod obrade slike. U najvećem broju slučajeva se koristi kod odstaranjivanja šuma sa slika, gdje se pokazala kao jako korisna zbog svojstva očuvanja ivica zašumljene slike, što bitno dopinosi očuvanju informacija sadržanih u slici. Pored navedenog, TV se koristi kod komprimovanog očitavanja podataka, rekonstrukcije i restauracije slike [2],[9],[10].

TV metoda se matematički može definisati na više načina, pa će u nastavku biti definisana preko formulacija komprimovanog očitavanja podataka, specifično pomoću formulacije (2.6). Dakle, TV minimizacioni problem za već pomenuti vektor mjerenja $\mathbf{y}$ i vektor transformacionog domena $\mathbf{x}$ se formuliše kao:

$$\min_{\mathbf{y}} TV(\mathbf{y}) \quad pod \quad uslovom \quad \mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}. \tag{2.15}$$

U realnim aplikacijama je često potrebno koristiti diskretni oblik TV minimizacije, pa je diskretni oblik TV metode definisan sljedećom relacijom:

$$TV(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} \sqrt{(\mathbf{x}_{i+1,j} - \mathbf{x}_{i,j})^2 + (\mathbf{x}_{i,j+1} - \mathbf{x}_{i,j})^2}. \tag{2.16}$$

Primjena TV minimizacije pri odstranjivanju šuma sa slika se može ilustrovati narednim primjerom. Nad slikom je izvršeno oštećenje tako što je dodat bijeli Gausov šum, nakon čega je iskorišćena TV minimizaciona metoda radi odstranjivanja šuma [11].

Slika 2.6: Prije i nakon primjene TV minimizacije

Sa slika se može primijetiti da odstranjivanje šuma bazirano na TV minimizaciji zadržava detalje slike, kao i ivice.

2.2 Koherencija

Sa slike 2.3 se može vidjeti da je originalni signal prvo predstavljen u određenom transfomacionom domenu (matrica Ψ), putem kojega se obezbjeđuje svojstvo rijetkosti signala, kao i vektor $\mathbf{x}$ kod kojega je većina koeficijenata bijele boje (imaju vrijednost nula), dok su ostali u boji (imaju vrijednost različitu od nule, K-rijedak). Matricu Ψ nazivamo baznom matricom transfomacionog domena.

Na istoj slici se nalazi i matrica mjerenja Φ koja, pomnožena sa baznom transformacionom matricom i K-rijetkim vektorom, daje vektor mjerenja $\mathbf{y}$ koji ima znatno manje dimenzije od originalnog signala. Matrica mjerenja se bira tako da izdvoji mjerenja nasumičnim postupkom, pa se uzima samo mali broj slučajno odabranih koeficijenata na osnovu kojih se obavlja rekonstrukcija. Odabir matrice mjerenja je ključan za navedeni proces jer ona mora biti konstruisana na takav način da se očuvaju za signal značajne informacije.

Relacija između broja mjerenja u matrici Φ i broja nenultih koeficijenata u transformacionoj matrici Ψ zavisi od koherencije navedenih matrica. Ukoliko su navedene matrice maksimalno koherentne, onda će svi koeficijenti biti potrebni za rekosntrukciju, što je loše. U opštem slučaju, što je manja koherencija između matrice mjerenja i transformacione matrice, to je potreban manji broj koeficijenata za rekonstrukciju [12],[13]. Međusobna koherencija matrica Φ i Ψ mjeri maksimalnu apsolutnu vrijednost korelacije dva elementa iz navedenih matrica, što matematički definišemo kao:

$$\mu(\Phi, \Psi) = \max_{i \neq j} \left| \frac{\left\langle \phi_i, \psi_j \right\rangle}{\left\| \phi_i \right\|^2 \left\| \psi_j \right\|^2} \right| \tag{2.17}$$

gdje su ϕ_i i ψ_j redovi u matrici Φ i kolone u matrici Ψ, respektivno.

U relaciji (2.6) je definisano da je $\mathbf{F} = \Phi\Psi$. Sada koherenciju možemo definisati i kao maksimalnu apsolutnu vrijednost normalizovanog unutrašnjeg proizvoda svih kolona u matrici $\mathbf{F}$:

$$\mu(F) = \max_{i \neq j, 1 \leq i,j \leq H} \left| \frac{\left\langle F_i, F_j \right\rangle}{\left\| F_i \right\|^2 \left\| F_j \right\|^2} \right| \tag{2.18}$$

gdje su F_i i F_j kolone matrice $\mathbf{F}$. Maksimalna vrijednost međusobne koherencije je 1 onda kada se određeni par kolona poklapa.

Koherencija matrice $\mathbf{F}$ dimenzija $H \times N$ sa kolonama koje su normalizovane putem ℓ_2-norme zadovoljava sljedeću nejednakost:

$$\mu \geq \sqrt{\frac{N-H}{H(N-1)}} \tag{2.19}$$

Nejednakost definisana u (2.21) predstavlja donju granicu, poznatu pod nazivom Velčova (*Welch*) granica. Valja primijetiti da ukoliko imamo veliko N, donju granicu aproksimiramo sa:

$$\mu \geq \sqrt{\frac{1}{H}} \tag{2.20}$$

Na osnovu prethodne analize, možemo definisati donju i gornju granicu za koherenciju matrice $\mathbf{F}$:

$$\mu \in \left[\sqrt{\frac{N-H}{H(N-1)}}, 1 \right] \tag{2.21}$$

Kao što je već rečeno, što je manja koherencija između matrice mjerenja i transformacione matrice, to je potreban manji broj nasumičnih mjerenja za rekonstrukciju originalnog signala, što je u skladu sa CS paradigmom.

2.3 Restricted isometry property (RIP)

Koherencija je korisna i jednostavna mjera kvaliteta matrice mjerenja Φ, ali Velčova granica definisana nejednakošću (2.21) limitira njenu upotrebu na manje nivoe rijetkosti (*sparsity levels*). Bolja mjera kvaliteta matrice mjerenja je potrebna da bi se prevazišla ova limitacija. Ta bolja mjera je omogućena pomoću RIP-a, u matematici takođe poznatog pod imenom *uniformni princip neodređenosti.*

Za podesno izabranu izometrijsku konstantu, RIP omogućava da bilo koji subset kolona u matrici $\mathbf{F}$ sa kardinalnošću manjom od nivoa rijetkosti K, bude skoro ortogonalan [2]. Ovime raste vjerovatnoća da će za uspješnu rekosntrukciju signala biti potreban mali broj mjerenja. Po definiciji, matrica $\mathbf{F}$ zadovoljava RIP reda K ukoliko postoji izometrijska konstanta $\delta_K \in (0,1)$ tako da:

$$(1-\delta_K)\left\|\mathbf{x}\right\|_2^2 \leq \left\|\mathbf{Fx}\right\|_2^2 \leq (1+\delta_K)\left\|\mathbf{x}\right\|_2^2 \tag{2.22}$$

važi za sve K-rijetke vektore, gdje je $\mathbf{F} = \Phi\Psi$.

Za izometrijsku konstantu važi da je:

$$\delta_1 \leq \delta_2 \leq ... \leq \delta_K \leq ... \leq \delta_N \tag{2.23}$$

Formulacija (2.24) se može zapisati i kao:

$$\left|\frac{\left\|\mathbf{Fx}\right\|_2^2 - \left\|\mathbf{x}\right\|_2^2}{\left\|\mathbf{x}\right\|_2^2}\right| \leq \delta_K \tag{2.24}$$

Ako matrica $\mathbf{F}$ zadovoljava RIP reda K sa izometrijskom konstantom δ_K, tada za bilo koje $K^{'} < K$ mi imamo matricu $\mathbf{F}$ koja zadovoljava RIP reda $K^{'}$ sa izometrijskom konstantom $\delta_{K'} < \delta_K$. Dodefinišimo prethodno tvrđenje uvođenjem pozitivnog cijelog broja γ. Tada matrica $\mathbf{F}$ zadovoljava RIP reda $K^{'} = \gamma[\frac{K}{2}]$ sa izometrijskom konstantom $\delta_{K'} < \gamma\delta_K$.

Ukoliko matrica $\mathbf{F}$ zadovoljava RIP onda ona približno zadržava Euklidsku dužinu rijetkih vektora. Dakle, za matricu $\mathbf{F}$ koja zadovoljava RIP reda $2K$ i kod koje je izometrijska konstanta manja od 1, možemo reći da su svi subsetovi od $2K$ kolona linearno nezavisni ili:

$$spark(\mathbf{F}) > 2K \tag{2.25}$$

gdje *spark* predstavlja najmanji broj zavisnih kolona i za njega važi sljedeća nejednakost:

$$spark(\mathbf{F}) \leq rank(\mathbf{F}) + 1 \tag{2.26}$$

Naša matrica $\mathbf{F}$ je dimenzija $H \times N$ pa možemo napisati da je:

$$2 \leq spark(\mathbf{F}) \leq H + 1 \tag{2.27}$$

Ako nema zavisnih kolona u matrici $\mathbf{F}$, tada je $spark(\mathbf{F}) = H + 1$, a ako jedna od kolona ima sve nulte koeficijente, tada je $spark(\mathbf{F}) = 1$. Tada iz (2.27) dobijamo:

$$K < \frac{1}{2} spark(\mathbf{F}) \leq \frac{1}{2}(H + 1) \tag{2.28}$$

Najčešće korišćene matrice mjerenja koje zadovoljavaju RIP su slučajna Bernulijeva matrica, slučajna Gausova matrica, parcijalna slučajna Furijeova matrica...

Postavlja se pitanje koliko je neophodno mjerenja da bi se postiglo RIP? Ako bismo ignorisali uticaj izometijske konstante δ_{2K} i fokusirali se samo na dimenzije problema, onda se može postaviti jednostavna donja granica.

Neka matrica mjernja $\mathbf{F}$, dimenzija $H \times N$, zadovoljava RIP reda $2K$ sa izometrijskom konstantom $\delta_{2K} \in (0, \frac{1}{2})$. Tada je:

$$H \geq CK \log(\frac{N}{K}) \tag{2.29}$$

gdje je C pozitivna konstanta i iznosi $C = \frac{1}{2} log(\sqrt{24} + 1) \approx 0.28$.

2.4 Matematičke transformacije

Razne matematičke transformacije se koriste u obradi multimedijalnih signala zbog raznovrsne prirode ovih signala. Multimedijalni signali mogu biti vremenski zavisni (govor, video) i nezavisni (slika, tekst). Samim tim su neke transformacije pogodnije u odnosu na druge, sve u zavisnosti od same prirode signala.

2.4.1 Diskretna Furijeova transformacija

Furijeova transformacija je jedna od osnovnih matematičkih transformacija koja se često koristi u obradi multimedijalnih signala. Ona signal iz vremenskog ili prostornog domena preslikava u frekvencijski domen. Reprezentacija u vremenskom domenu može biti teška za interpretaciju kod signala koji su korumpirani šumom, pa je frekvencijski domen pogodniji [14]-[17].

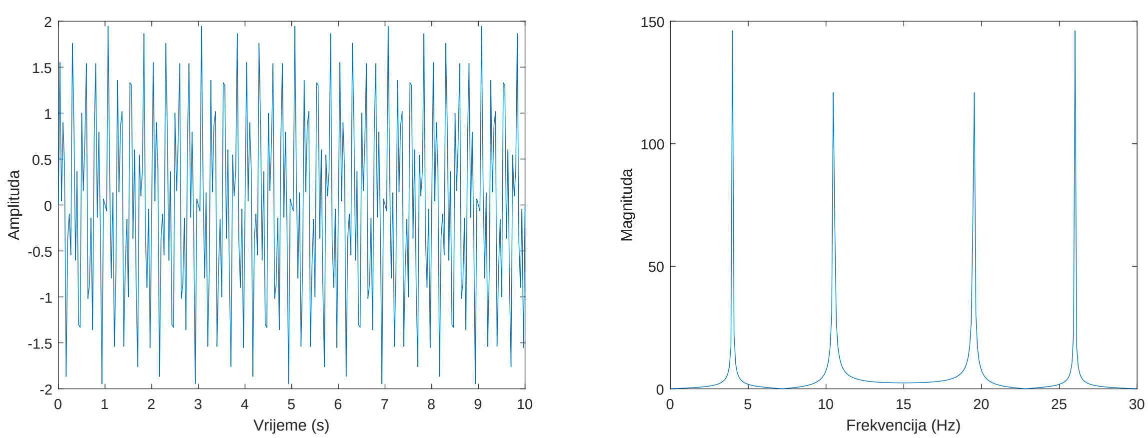
Neka imamo signal $f(t)$. Furijeova transformacija se matematički definiše kao:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{2.30}$$

Inverzna Furijeova transformacija je definisana:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{2.31}$$

Kod obrade signala, Furijeova transformacija može otkriti bitne karakteristike signala, kao što su njegove frekvencijske komponente. Jedan takav primjer je dat na slici 2.7, gdje je uzet signal iz vremenskog domena i nad njime je izvršena Furijeova transformacija, čime dobijamo frekvencijske komponente u Furijeovom transformacionom domenu. Dobijena su četiri pika, s time što su dva pika sa lijeve strane replikacija (lik u ogledalu) od dva pika sa desne strane i predstavljaju negativnu frekvenciju signala. Matlab kod ovog primjera je dat u prilogu rada.



Slika 2.7: Lijevo je signal u vremenskom domenu, dok je na desno signal u Furijeovom transformacionom domenu

Neke od osnovnih osobina Furijeove transformacije su osobina linearnosti (Furijeova transformacija linearne kombinacije signala je jednaka linearnoj kombinaciji njihovih Furijeovih transformacija), vremenskog pomjeraja (pomijeranje signala u vremenskom domenu rezultira množenjem Furijeove transformacije signala sa faznim faktorom), frekvencijskog pomjeraja (modulisanje signala sa kompleksnom eksponencijalnom funkcijom pomijera Furijeovu transformaciju signala duž frekvencijske ose), konvolucije (Furijeova transformacija konvolucije dva signala jednaka je proizvodu Furijeovih transformacija individualnih signala)...

Pošto se diskretni signali najčešće koriste u praktičnim primjenama, neophodno je uvesti diskretni oblik Furijeove transformacije. Diskretna Furijeova transformacija (DFT) je primarno oruđe za digitalnu obradu signala i jedna od najčešće korišćenih transformacija. Uzmimo signal konačnog trajanja, sa N odbiraka [2]. Njegovu DFT nalazimo kao:

$$DFT(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)[cos(\frac{2\pi}{N}nk) - jsin(\frac{2\pi}{N}nk)], \tag{2.32}$$

gdje je $k \in [0, N-1]$ trenutna frekvencija. Inverzna DFT je:

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} DFT(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}. \tag{2.33}$$

Treba primijetiti da je $DFT(k)$ kompleksan broj koji enkodira amplitudu i fazu sinusoidalne komponente $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$.

Komputaciono i vremenski efikasniji algoritmi su razvijeni da bi se vršila direktna i inverzna DFT i oni se nazivaju brza Furijeova transformacija (*Fast Fourier Transform*).

2.4.1.1 Primjena DFT-a

DFT ima svoju primjenu u velikom broju različitih polja ljudske djelatnosti, sve u zavisnosti od prirode problema. Neke od primjena su date u nastavku [14],[18],[19].

Kompresija podataka. Samom činjenicom da se neki signal iz vremenskog domena sa velikim brojem odbiraka može predstaviti u frekvencijskom domenu sa mnogo manjim brojem odbiraka čini DFT idealnom za kompresiju podataka. Tako nekoliko kompresionih postupaka sa gubitkom (*Lossy compression*) nad zvukom i slikom u sebi koriste DFT. Tu je procedura sljedeća: signal se segmentiše u kratke segmente, nad svakim segmentom se izvrši DTF, onda se Furijeovi koeficijenti sa viših frekvencija odbace i nakon toga se izvrši inverzna DFT nad koeficijentima koji su ostali. Ovi kompresioni algoritmi u posljednje vrijeme više koriste diskretnu kosinusnu transformaciju ili wavelet transformaciju jer daju relativno bolje performanse kompresije.

Spektralna analiza signala i frekvencijski odziv sistema. DFT se najčešće koristi da bismo dobili informacije o amplitudi, frekvenciji i fazi signala, a sama spektralna analiza je karakterisana sa ”frekvencijskim sadržajem” signala. Analiza nekog sistema se može obaviti u vremenskom domenu putem konvolucije, a slična analiza se može obaviti i u frekvencijskom domenu. Svaki ulazni signal u neki sistem se može posredstvom Furijeove transfomacije predstaviti kao grupa talasa, svaki sa svojom fazom i amplitudom. Isto tako se mogu predstaviti i izlazni signali tog sistema. Ovo znači da se bilo koji linearni sistem može opisati sa promjenom amplitude i faze talasa koji prolaze kroz njega, pa se ova informacija naziva frekvencijskim odzivom sistema. Veza između frekvencijskog i impulsnog odziva sistema se ostvaruje putem Furijeove transformacije na način što je frekcvencijski odziv nekog sistema jednak Furijeovoj transformaciji impulsnog odziva tog istog sistema.

Optika i medicina. DFT se često koristi pri modelovanju načina an koji elektroni ili svjetlost putuju kroz neki optički sistem. Takođe, koristi se pri rekonstrukciji trodimenzionalnih objekata što je našlo svoju široku primjenu u medicini (posebno tomografiji).

Matematika. Pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina je često koristišćena DFT. Razlog njenog korišćenja leži u činjenici da se DFT može koristiti i kao aproksimacija za Furijeove redove, što neki problem prevodi u kompleksni domen, gdje se mnogi matematički proračuni pojednostavljuju. Pored parcijalnih diferencijalnih jednačina, DFT se može primijeniti i kod množenja polinoma i množenja velikih brojeva.

2.4.2 Diskretna kosinusna transformacija

Diskretna kosinusna transformacija (DCT) se koristi u mnogim situacijama koje uključuju realne signale. Slična je diskretnoj Furijeovoj transformaciji (DFT), jer obje transformišu signal ili sliku u frekvencijski domen [2],[20],[21]. Diskretna kosinusna tranformacija nekog jednodimenzionalnog, realnog signala *f(j)* dužine N se formuliše kao:

$$DCT(k) = h(k) \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \cos \frac{k\pi(2j+1)}{2N}, \quad k = 0, ..., N-1 \tag{2.34}$$

dok se inverzna diskretna kosinusna transformacija definiše na sličan način:

$$f(j) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) DCT(k) \cos \frac{k\pi(2j+1)}{2N}, \quad j = 0, ..., N-1 \tag{2.35}$$

Za obje relacije (2.34) i (2.35) važi isti normalizacioni koeficijent *h(k)*:

$$h(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & k = 1, ..., N-1 \end{cases} \tag{2.36}$$

Za dvodimenzionalni signal *f(x,y)* diskretna kosinusna transformacija je:

$$DCT(k,m) = h(k)h(m) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cos \frac{k\pi(2x+1)}{2N} \cos \frac{m\pi(2y+1)}{2N} \tag{2.37}$$

dok je inverzna DCT:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} h(k)h(m) DCT(k,m) \cos \frac{k\pi(2x+1)}{2N} \cos \frac{m\pi(2y+1)}{2N} \tag{2.38}$$

DCT je realna, ortogonalna i rekurzivna transformacija sa razvijenim brzim algoritmima za njeno računanje.

DCT sliku predstavlja kao sumu sinusoida različitih magnituda i frekvencija. Za neku tipičnu sliku, većina informacija bitnih za njenu rekonstrukciju se nalazi u samo nekolika DCT koeficijenta, što objašnjava široku upotrebu DCT-a kod kompresionih postupaka (primjer na slici 2.8).

2.4.2.1 Primjena DCT-a

Jako je široka primjena DCT-a u raznim oblastima inženjerstva i medicine, najviše zbog svojstva DCT-a da bitne informacije sačuva u nekoliko koeficijenata [20],[22].

Kompresija podataka. DCT se primjenjuje u mnogim kompresionim postupcima, kao što su

MPEG, JPEG... Bazična ideja iza ovih kompresionih postupaka je dekorelacija podataka među pikselima, jer jedan piksel može pružiti informacije o svom susjedu (npr. boju susjednih piksela). Postupak primjene diskretne kosinusne transformacije kod kompresionih algoritama se može ilustrovati na primjeru JPEG kompresije. Ulazna slika se dijeli na 8×8 (ili 16×16) blokove piksela, nakon čega se primjenjuje dvodimenzionalna DCT nad svakim blokom. Dobijeni DCT koeficijenti se onda kvantizuju, kodiraju i transmituju. JPEG risiver dekodira prispjele koeficijente, obavlja dvodimenzionalnu inverznu diskretnu kosinusnu transformaciju nad blokovima, nakon čega dobijene blokove spaja u cjelinu. Većina DCT koeficijenata ima vrijednost blisku nuli, pa se mogu zanemariti bez ozbiljne štete po kvalitet rekosntruisanog signala (što je i sama bit kompresije) [6].

Prethodno opisani postupak prikažimo primjerom. Neka imamo sliku dimenzija 256×256 nad kojom se vrši DCT po 8×8 blokovima. U svakom bloku se odbacuju (postavljaju na nulu) svi osim 13 koeficijenata, što znači da imamo po bloku ugrubo 80% nultih koeficijenata. Nakon toga se nad blokovima vrši inverzna DCT radi rekonstrukcije slike. Ulazna i izlazna slika je data na slici 2.8. Matlab kod navedenog primjera je dat u prilogu rada.

Slika 2.8: Lijevo je originalna slika, dok je na desno data rekonstruisana slika

Posmatrajući slike, možemo vidjeti da je rekonstruisana slika jasno prepoznatljiva, iako došlo do pojave blage degradacije kvaliteta zbog 80% odbačenih DCT koeficijenata.

Biometrika. Zbog već pomenutog svojstva kompresije, DCT se primjenjuje kod umetanja vodenog žiga u biometrička dokumenta, identifikacije i registracije otisaka dlana i prstiju, prepoznavanja lica...

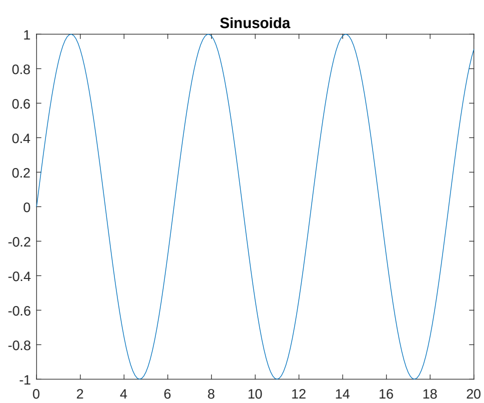
Obrada multimedijalnih signala. Upotrebu ima kod audio kompresije, audio kodiranja, procesuiranja govora u mobilnim komunikacijama, prepoznavanja fonema u govoru, detekcije krivotvorenih slika, rekonstrukcije slika, formatiranja boja na slikama, procjene kvaliteta slika, unapređenja rada nadzornih kamera, video editovanja i kodiranja, analize pokreta...

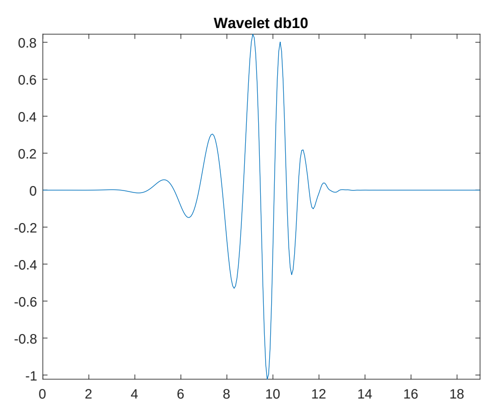
Medicina. Primjenjuje se kod kompresione klasifikacije tumora, fuzije medicinskih slika, skraćenju rada medicinskih senzora...

Bežične komunikacije. Zbog svojih korisnih svojstava, svoje mjesto ima u bežičnim akustičničnim senzorskim mrežama, radio mrežama, filtriranju dolazećih signala na senzorima koji su posrednici u *point-to-point* komunikacijama...

2.4.3 Wavelet transformacija

U doslovnom prevodu sa engleskog jezika, naziv wavelet bi značio "mali talas". Wavelet-i su talasi ograničenog trajanja čija je srednja vrijednost jednaka nuli [23],[24]. Za razliku od sinusoida, koje se teorijski prostiru do u beskonačnost, koje su glatke i pogodne za opisivanje stacionarnih signala, wavelet-i imaju početak i kraj, često su nesimetrični i podesni su za opisivanje određenih anomalija ili pulseva. Poređenje ovih karakteristika je dato na slici 2.9.





Slika 2.9: Poređenje sinusoide i wavelet-a

Posmatrajmo realnu funkciju $\psi(t)$ koja je definisana na realnoj osi $(-\infty, +\infty)$. Ona mora da zadovolji sljedeća dva uslova:

1. Cijela površina ispod krive $\psi(t)$ je jednaka nuli:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,dt = 0. \tag{2.39}$$

2. Funkcija $\psi(t)$ ima konačnu energiju:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2\,dt < \infty. \tag{2.40}$$

Funkcija $\psi(t)$, koja zadovoljava ova dva uslova se često naziva majka wavelet (*mother wavelet*). Kontinualni wavelet je formiran skaliranjem i translacijom $\psi(t)$ u vremenskom domenu, pa se matematički definiše kao:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\Big(\frac{t-b}{a}\Big), \tag{2.41}$$

gdje je a realan broj koji je skalirajući parametar dok je b takođe realan broj koji je translacioni parametar. Imenilac, $\sqrt{|a|}$, je normalizacioni faktor u izrazu, koji omogućava nezavisnost energije signala od parametra a [25].

Ako je $0<a<1$, funkcija se skraćuje, dok za vrijednosti a>1 funkcija se prolongira u vremenu. Transliranje waveleta se odvija duž x-ose, u zavisnosti od vrijednosti parametra b.

Wavelet transformacija nekog signala $f(t)$ se definiše kao suma proizvoda tog signala sa skaliranom i transliranom wavelet funkcijom $\psi_{a,b}(t)$, što se matematički zapisuje kao:

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{a,b}(t)\,dt, \tag{2.42}$$

gdje je $W(a,b)$ kontinualna wavelet transformacija (CWT) sa koeficijentima koji su funkcija skaliranja i pozicije.

Dobijanje originalnog signala na osnovu wavelet koeficijenata se postiže inverznom wavelet transformacijom:

$$f(t) = C^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}(t)W(a,b)\,dadb. \tag{2.43}$$

C je konačan i pozitivan parametar, zvan konstanta prihvatljivosti (*admissible constant*), definisan kao:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega}\, d\omega, \tag{2.44}$$

gdje je $\Psi(\omega)$ Furijeova transformacija od $\psi(t)$. Ukoliko je vrijednost parametra $0 < C < \infty$, onda je dati wavelet prihvatljiv, što znači da postoji inverzna wavelet transformacija.

Wavelet analiza predstavlja dekompoziciju funkcije na transliranu i skaliranu verziju baznog (majka) wavelet-a. CWT je vremensko-frekventna transformacija koja je idealna za analizu nestacionarnih signala (kod kojih se frekvencijska reprezentacija mijenja u vremenu) i slična je kratkotrajnoj Furijeovoj transformaciji (Short-Time Fourier Transform), s time što dozvoljava promjenljivu vremensko-frekventnu rezoluciju. Za niže frekvencije koriste se duži wavelet-i radi unapređenja frekvencijske lokalizacije, ali na štetu vremenske lokalizacije, dok se za više frekcencije koriste kraći wavelet-i radi unapređenja vremenske lokalizacije, ali na štetu frekvencijske lokalizacije [26].

U mnogim praktičnim aplikacijama se umjesto CWT koristi diskretna wavelet transformacija (DWT). Kod DWT se translacija i skaliranje obavljaju u diskretnim koracima, pa su parametri a i b diskretizovani. Diskretizacija parametra a se obavlja pomoću stepena dilatacionog parametra a_0 kao:

$$a = a_0^{-j}, \tag{2.45}$$

gdje je a_0 fiksno i veće od jedan, a $j \in \mathbf{Z}$. Diskretizacija parametra b se vrši putem:

$$b = kb_0a_0^{-j}, \tag{2.46}$$

gdje je $k \in \mathbf{Z}$, a b_0 veće od nule. Putem ovako diskretizovanih parametara a i b možemo dobiti diskretizovanu familiju wavelet-a čija se matematička formulacija definiše kao:

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{\frac{j}{2}} \psi(a_0^j t - kb_0). \tag{2.47}$$

DWT se dobija množenjem originalnog signala $f(t)$ sa ovako definisanim diskretnim wavelet-om $\psi_{j,k}(t)$:

$$W_{j,k}^d = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{j,k}(t)\, dt = a_0^{\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi(a_0^j t - kb_0)\, dt. \tag{2.48}$$

Ako stavimo da je $a_0 = 2$ i $b_0 = 1$, onda postižemo dijadijsko odabiranje (*dyadic sampling*), pa se i sama dekompozicija navedenog signala naziva dijadijska dekompozicija, te jednačina (2.41) poprima sljedeći oblik:

$$W^d_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi(2^j t - k)\, dt. \tag{2.49}$$

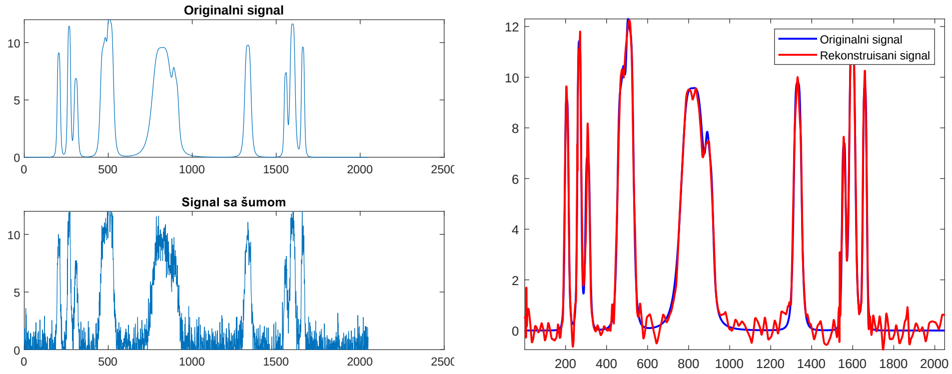
2.4.3.1 Primjena wavelet-a

Wavelet-i se zadnjih nekoliko decenija nezavisno razvijaju u oblastima matematike, fizike, obrade signala, seizmologije, geologije... Tako svoju primjenu imaju kod rješavanja diferencijalnih jednačina, modelovanju turbulencija, uklanjanju šuma kod detektovanih signala u molekularnoj spektroskopiji, predviđanju zemljotresa, istraživanju udaljenih galaksija. Pošto je wavelet teorija sa primjenama relativno mlada oblast, nekoliko uspješnih primjena je dato u nastavku [27].

Obrada signala i slika. Procesuiranje signala podrazumijeva analizu i interpretaciju kompleksnih vremenskih serija. Signali trebaju da budu precizno analizirani, efikasno kodirani, brzo prenešeni i tačno i pažljivo rekonstruisani. Bilo da su u pitanju jednodimenzionalni (najčešće u funkciji od vremena) ili dvodimenzionalni (slike) signali i njihov prenos, kompresija tih podataka je posljedica ograničenih kapaciteta transmisionog kanala, kao i memorijskih kapaciteta. Samim tim, oni na drugoj strani moraju biti dekodirani, sintetizovani i rekonstruisani. Neke nepotrebne informacije ili degradacija signala posrednstvom šuma se javljaju, pa se i oni moraju odstraniti radi kvalitetne rekonstrukcije. Wavelet-i zauzimaju značajno mjesto u obradi signala.

- *Odstranjivanje šuma.* Problem se sastoji u nalaženju originalnog signala na osnovu korumpiranog signala (nekompletni ili pošumljeni podaci). Čišćenje signala se sastoji u odstranjivanju detalja sa koeficijentima koji su ispod nekog praga, mijenjajući te koeficijente sa nultom vrijednošću, te primjenom inverzne wavelet transformacije dobijamo očišćen signal. Demonstracija jedne ovakve procedure je data na slici 2.10.

- *Seizmologija.* Jedna od glavnih odlika seizmičkih signala jeste njihov nestacionaran karakter. Lokacija i predikcija određene seizmičke aktivnosti se može obaviti



Slika 2.10: Vidljivo je da je *wavelet denoiser* odstranio veliku količinu šuma, dok je istovremeno sačuvao oštre odlike signala (što je unapređenje u odnosu na odstranjivanje šuma bazirano na Furijeu (*Fourier-based denoising*)). Za potrebe dodavanja i odstranjivanja šuma sa signala, korišćene su ugrađene Matlab funkcije *wnoise* i *wdenoise*, respektivno. Kod je dat u prilogu rada

putem wavelet koeficijenata seizmičkih signala. Ovi signali upozoravaju na moguće vibracije zemlje, zemljotrese i eksplozije. Ove vibracije su talasi kojima se longitudalna i transverzalna komponenta mijenjaju u zavisnosti od faze nadolazećeg zemljotresa. Seizmograf bilježi obje komponente i procesuira ih putem DWT-a, omogućujući pronalaženje lokacije seizmičke aktivnosti.

- *Medicina.* Svaka kontrakcija srčanog mišića se manifestuje talasom koji bilježi elektrokardiogram (EKG). Analiza EKG signala je produkovala veliki broj dijagnostičkih metoda za detekciju neregularnosti kod rada srca, među kojim je i QRS detekcija koja je bazirana na wavelet-ima. Tehnički aspekt primjene wavelet-a kod procesuiranja EKG signala je jako značajan. Kompresija EKG signala koristeći algoritam koji je baziran na wavelet-ima zadržava bitne osobine signala koje neka druga konvencionalna metoda ne bi zadržala. Tehnike bazirane na wavelet-ima su se pokazale kao korisne kod rada sa akustičnim podacima. Koristeći ehokardiograf možemo posmatrati strukturu srca na osnovu reflektovanih signala, a koristeći wavelet procesiranje mogu se izračunati frekvencija i ubrzanje rada srca.

- *Automatika i industrija.* Moderna akustična analiza i oprema za obardu signala se koriste radi kontrole kvaliteta proizvoda u automatizovanim fabrikama. Tako se wavelet transformacija koristi u analizi eksplozija unutar motora automobila. Ove eksplozije nastaju zbog grešaka u kontrolnom sagorijevanju kada se motor pokreće i one mogu produkovati šok talase koji mogu uništiti motor. Wavelet transformacija signala dobijenog pri sagorijevanju može dati jako korisne informacije te se time i unapređuje sistem sagorijevanja.

- *Astronomija.* Proučavanje udaljenih galaksija se vrši teleskopima koji produkuju slike Kosmosa sa jako velikom količinom informacija. Wavelet analiza se koristi za procesuiranje ovih slika. Tako se čuvaju ivice slike i trodimenzionalna reprezentacija posmatrane galaksije se može na osnovu njih dobiti.
- *Katalogizacija otisaka prstiju.* Unutar FBI arhiva se nalazi nekoliko stotina miliona karata sa otiscima prstiju, i svaki od ovih otisaka se mora digitalizovati na rezoluciju od 500 piksela po inču, tako da neki otisak ima u prosjeku oko 700 000 piksela, što je memorijski konzumantno, jer se velika količina podataka mora arhivirati, a istovremeno mora biti obezbijeđena brza pretraga. To znači da se mora izvršiti kompresija podataka, a FBI je usvojio standard digitalne kompresije koji je baziran na wavelet-ima.

Numeričko modeliranje. Zadnjih decenija, wavelet-i su postali popularna metoda za numeričke aproksimacije i kalkulacije (sa određenim restrikcijama). Glavne prednosti wavelet-a u odnosu na neke druge metode su jednostavnost, stabilnost, ekonomičnost i mogućnost primjene različitih rezolucija za različite regione domena.

- *Diferencijalne jednačine.* Većina procesa u nauci i tehnologiji se mogu opisati diferencijalnim jednačinama, koje se mogu tretirati na razne načine koristeći wavelet-e. Wavelet-i se koriste kao bazne funkcije za razne metode kao što su varijacione metode, metoda najmanjih kvadrata... Svoju primjenu su našli i kod rješavanja parcijalnih jednačina, kao i kod modelovanja kontinualnih vrijednosti kod procesa koje karakteriše velika promjena u gradijent, kao kod šok talasa ili turbulencija.
- *Problemi turbulencije.* U dinamici fluida, turbulencija predstavlja jedan od težih problema. Turbulentni tok se modeluje Navijer-Stoksovom jednačinom (*Navier-Stokes*) i da bi se izbjegli problemi njenog rješavanja, koristi se dekompozicija bazirana na wavelet-ima.
- *Operatori.* Široka klasa operatora ima rijetku reprezentaciju u wavelet domenu, pa se time omogućuje njihova upotreba kod određenih brzih algoritama za rješa-

vanje integralnih jednačina. Neki od tih operatora su Calderon-Zigmud i pseudo-diferencijalni operatori. Ovime se omogućuje kompresija operatora jer se brišu elementi sa malim vrijednostima.

2.4.3.2 Wavelet familije

Samim tim što imaju tako široku primjenu u raznim oblastima ljudske djelatnosti, wavelet-i su predmet brojnih istraživanja i naučnih radova iz oblasti matematike i obrade signala, te postoje razne vrste wavelet-a koji su razvijani u razne svrhe. Fokus ovoga rada će biti sljedeći wavelet-i : Daubechies, Coiflets, Symlets.

Daubechies Dizajnirani od strane Ingrid Daubechies, predstavljaju familiju ortogonalnih wavelet-a koji su učinjeli diskretnu wavelet analizu praktičnom. Glavana karakteristika Daubechies wavelet-a je maksimalan broj nestajućih momenata (*vanishing moments*) za datu podršku (*support*, podskup neke realne funkcije koji sadrži elemente tog domena koji se razlikuju od nule) [28]. Nestajući momenti ograničavaju mogućnost wavelet-a da predstavi polinomijalno ponašanje signala i nazivaju se stepenom wavelet-a.

Sve diskusije o wavelet-ima počinju sa Harr-ovim wavelet-om, koji je prva i najjednostavnija verzija wavelet-a. On je diskontinualan i podsjeća na step funkciju. Analitički, Harr wavelet se zapisuje kao:

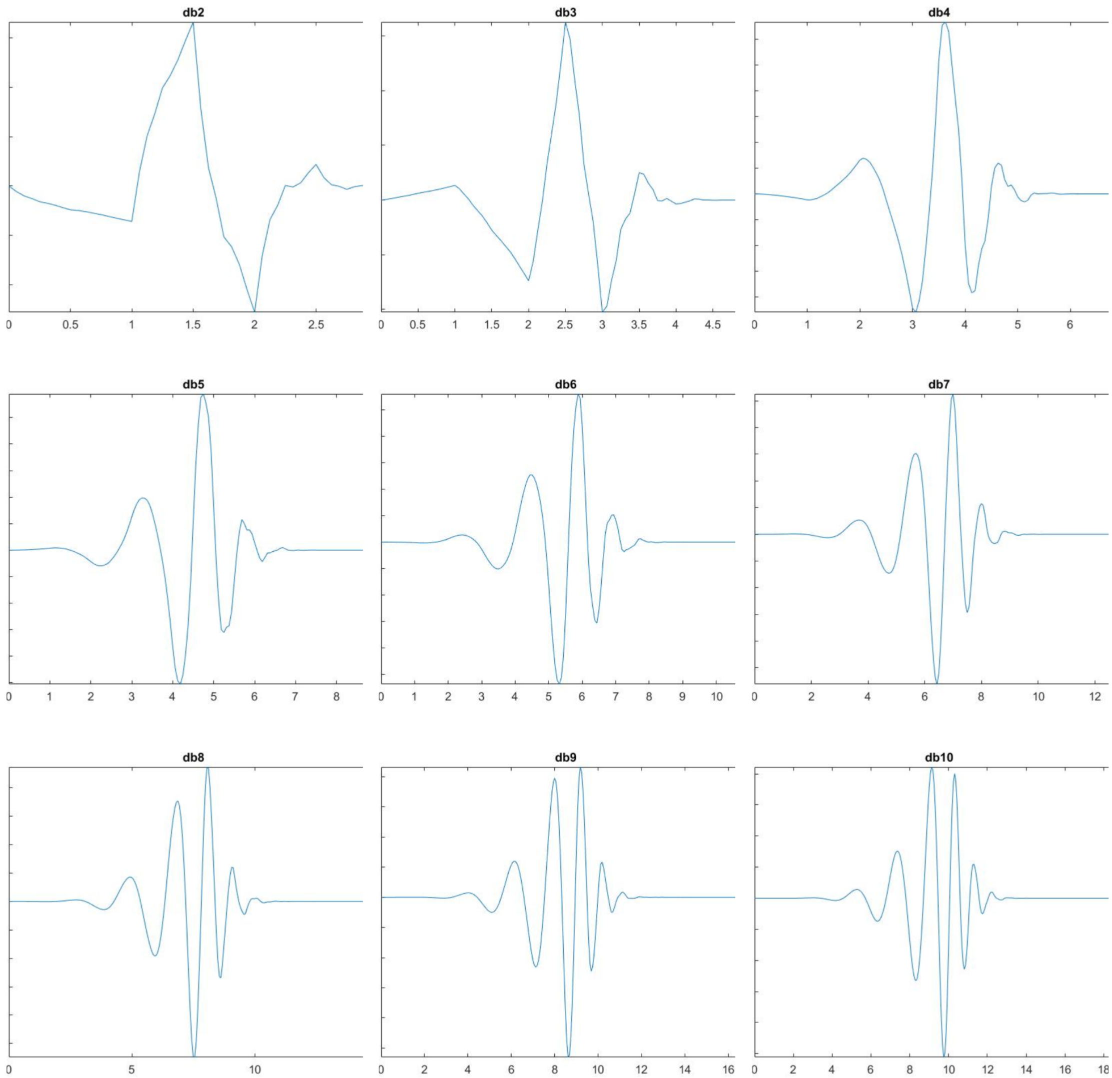
$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 0.5], \\ -1, & x \in [0.5, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases} \tag{2.50}$$

Veće stepene Daubechies wavelet-a nije tako lako analitički opisati kao u slučaju Harr-a.

Daubechies wavelet-i se obično obilježavaju sa 'dbN', gdje je N broj nestajućih momenata. Harr-ov wavelet je 'db1', dok je narednih devet Daubechies wavelet-a prikazano na slici 2.11.

Stepen wavelet-a je određen brojem nestajućih momenata ili brojem nultih momenata u wavelet funkciji što je slabo povezano sa brojem oscilacija same funckije. Što je veći broj nestajućih momenata, to je bolja frekvencijska lokalizacija dekompozicije.

Daubechies wavelet-i imaju jako dobre performanse u mnogim aplikacijama koje zahtijevaju veliku preciznost. Jedna su od najpopularnijih opcija pri odabiru familije wavelet-a, s

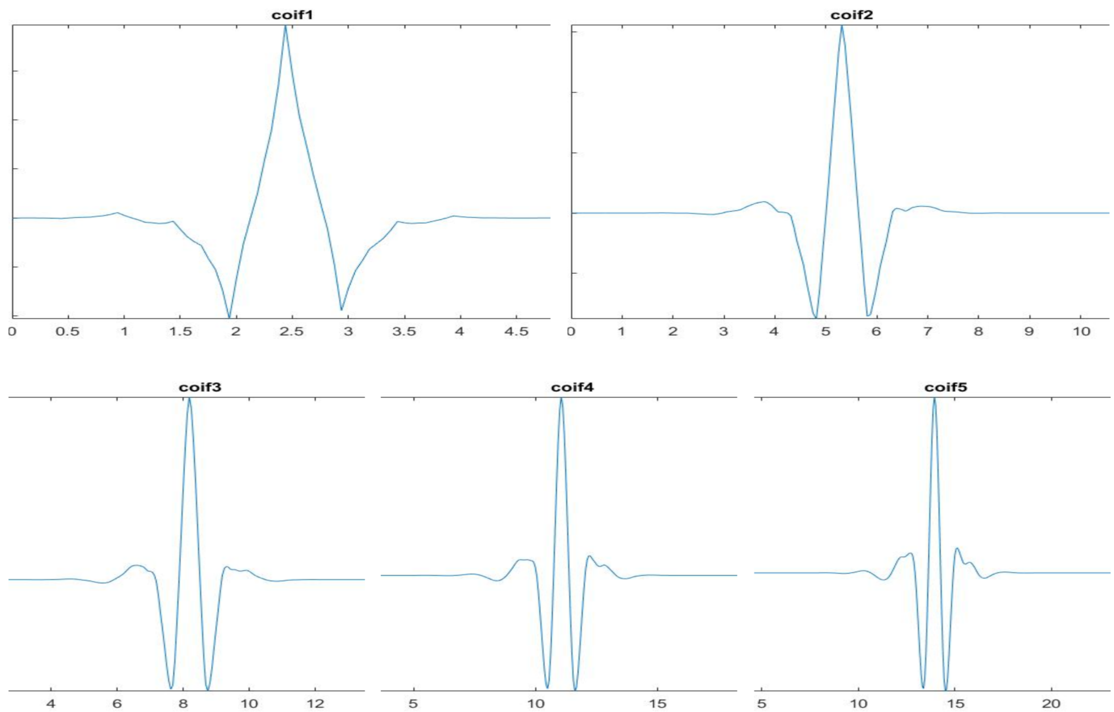


Slika 2.11: Prikaz Daubechies wavelet-a, od drugog do desetog

time da su prvih deset ('db1' - 'db10') najviše u upotrebi.

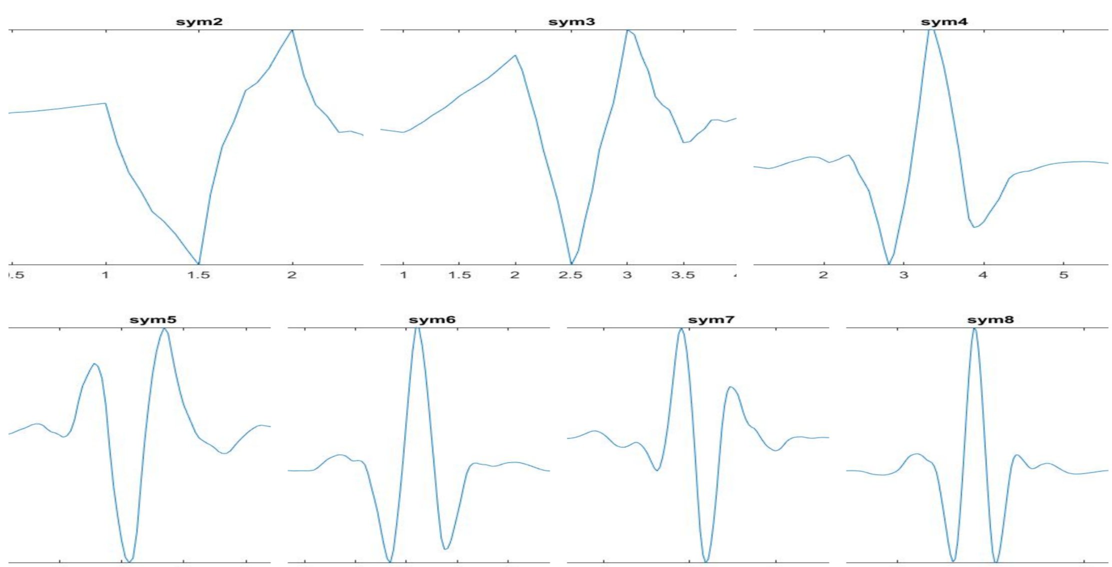
Coiflets Kreirani od strane Ingrid Daubechies na zahtjev Ronalda Coifmana (po kome su i dobili ime) [29]. Njih, kao i Daubechies wavelet-e, karakterišu nestajući momenti i skalirajuće funkcije, u oznaci 'coifN', gdje je N broj nestajućih momenata za wavelet i skalirajuću funkciju.

Sa slike 2.12 se vidi da su skoro simetrični i da sa povećanjem broja N, coiflet postaje uži. Pokazali su se odlično kod odabirajućih aproksimacija glatkih funkcija.



Slika 2.12: Prikaz prvih pet coiflet-a

Symlets Predstavljaju familiju wavelet-a koji su modifikovana vezija Daubechies wavelet-a. Modifikacija se ogleda u većoj simetriji u odnosu na Daubechies [30],[31]. Za njih se može reći da su skoro pa simetrični (u literaturi se često nazivaju najmanje asimetrični Daubechies wavelet-i).



Slika 2.13: Prikaz symlet wavelet-a za različite nestajuće momente

Osobine ove dvije familije wavelet-a (Daubechies i Symlet) su jako slične. Na slici 2.13 je primjetan veći stepen simetrije u odnosu na Daubechies.

2.5 Primjena kompresivnog odabiranja

Pošto CS nudi mogućnost drastičnog smanjenja broja neophodnih informacija za rekonstrukciju i manju upotrebu resursa prilikom skladištenja i transmisije, svoju primjenu je našao u raznim domenima ljudske djelatnosti [32]-[35].

Neki primjeri primjene su:

Slike. Očigledna je primjena CS-a kod različitih tipova slika. Današnje kamere mogu imati rezoluciju od nekoliko desetina megapiksela, pa se postavlja pitanje da li je zaista neophodno sačuvati toliku količinu podataka. CS pristup omogućava senzorima u kameri redukciju potrebne energije slike. Ultrazvučno prikupljanje podataka gdje se koristi zvučni signal radi dobijanja slike organa u unutrašnjosti tijela. Samom primjenom CS-a nije potrebno odabirati reflektovani signal Nikvistovom brzinom, već mnogo manjom. Upotreba CS-a kod magnetne rezonantne tomografije (MRI) može drastično smanjiti period potreban za akviziciju informacija, jer je sam proces magnetne rezonanse poprilično dug i psihološki neprijatan za pacijenta. CS svoje mjesto ima i kod holografije radi unapređenja reprodukcije trodimenzionalnih slika, kao i kod uređaja za prepoznavanje lica.

Radio talasi. Kod radio uređaja, dolazeći signal se kompresuje i vrši se AD konverzija radi daljeg očitavanja. Ovi uređaji su često skupi, a pored toga, u tradicionalnim radio sistemima pojavljuje se i pitanje rezolucije. Glavna prednost primjene CS-a u radio sistemima je predstavljanje vremensko-frekventne komponente u diskretnu komponentu, te projekcije toga u matricu koja ima rijetku reprezentaciju.

Navedeno važi i za radio-astronomske uređaje i satelite koji mjere i obrađuju radio talase.

Biologija. CS paradigma se može iskoristiti radi povećanja efikasnosti i smanjenja troškova za biološka istraživanja. Tako se CS koristi kod tehnike komapracija niza DNK mikrostruktura, gdje se simultano mjeri i detektuje veliki broj različitih genomskih struktura posredstvom biosenzora. Još jedan od primjera primjene CS-a je kod istraživanja ekspresije gena (*gene expression*).

Računarske mreže. Procjena mrežnog kašnjenja se može modelovati neodređenim sistemom linearnih jednačina. Uz to, mrežne rutirajuće matrice generalno zadovoljavaju CS uslove.

Ispravljanje greški. CS pokazuje značajna unapređenja u obasti teorije informacija i kodova, pogotovo kod ispravljanja greški prilikom prenosa signala. Informacije koje se šalju od transmitera do risivera putuju raznim transmisionim medijumima i tom prilikom dolazi do degradacije kvaliteta signala posredstvom šuma ili se neke informacije izgube prilikom prenosa. Postavlja se pitanje kako na efikasan način izvršiti ispravljanje ovih greški i rekonstruisati poslati signal tako da što više nalikuje na poslati. CS nudi rješenje tako što predlaže rekonstrukciju preko rijetke reprezentacije, pošto se greške često javljanu na prepoznatljivim mjestima.

3 Biomedicinske slike

Značaj biomedicinskih slika je od esencijalne važnosti u medicinskoj dijagnostici. Pomoću njih se dobija jasna predstava o stanju unutrašnjih organa i kostiju kod pacijanata, što značajno olakšava proces utvrđivanja opšteg zdravlja pacijenta.

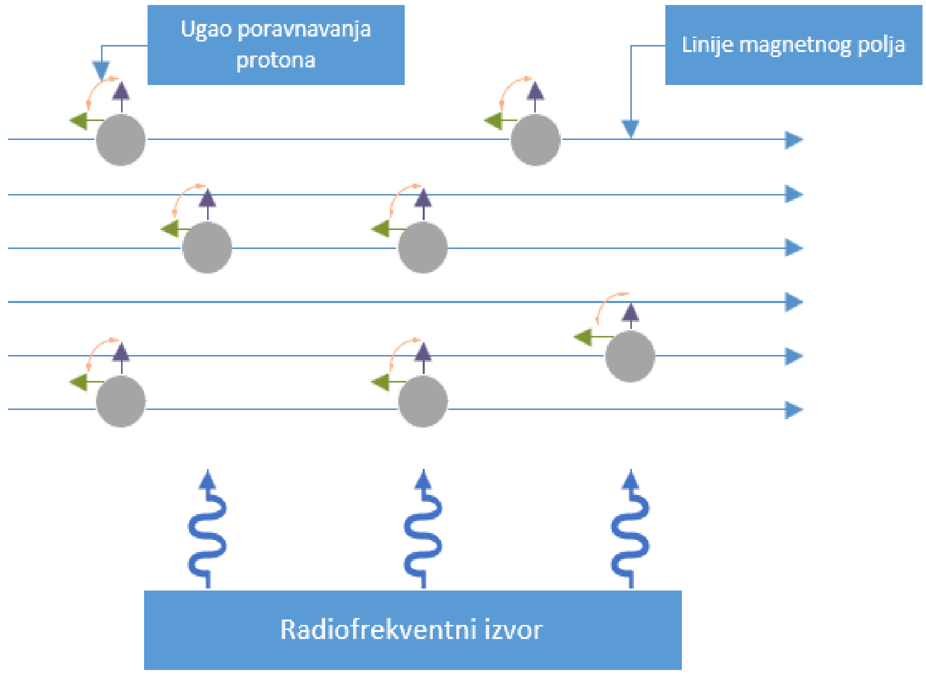
Obrada biomedicinskih slika je jako široko polje istraživanja jer pokriva međusobno zavisne cjeline, od prikupljanja biomedicinskih signala, inicijalnog formiranja slike, procesuiranja dobijene slike i prikaza iste posredstvom specijalizovanih uređaja. U svojoj osnovi većina tehnika koje se koriste prilikom obrade biomedicinskih slika uključuju otklanjanje šuma (*denoising*), otklanjanje zamućenja (*deblurring*), ocrtavanja (*outlining*), filtriranja...

Sistemi za procesuiranje biomedicinskih slika kombinuju hardver i softver i konstantno su u procesu unapređenja. Najčešće korišćeni sistemi i procesi u svrhu generisanja biomedicinskih slika su magnetna rezonatna tomografija, X-ray i kompjuterizovana tomografija. Svaki od njih ima svoje prednosti i mane, kao i rizike [36].

3.1 Magnetna rezonantna tomografija

Magnetna rezonantna tomografija (*Magnetic Resonance Imaging - MRI*) predstavlja radiološku metodu čije se funkcionisanje zasniva na upotrebi magnetnog polja i metoda za obradu slike sa ciljem sagledavanja unutrašnjosti tijela.

MRI koristi principe nuklearne magnetne rezonancije tehnike spektroskopije. Bazirana je na tehnici detektovanja promjene u smjeru rotacije protona u molekulu vode (ljudsko tijelo je sastavljeno od oko 60 % vode). Kada se pacijent izloži jakom magnetnom polju, protoni u molekulima vode se poravnaju sa linijama stranog magnetnog polja. Nakon poravnavanja, pacijent se izloži radiofrekventnim talasima koji stimulišu protone da iskoče iz svog ravnotežnog stanja i usprotive se linijama magnetnog polja (u ovom momentu je ugao poravnavanja protona u odnosu na linije magnetnog polja 90° ili 180°), što je ilustrovano na slici 3.1 . Nakon isključenja radiofrekventnih talasa, protoni se vraćaju u prethodno stanje i poravnavaju se sa linijama magnetnog polja, pri čemu emituju određene količine energije koje registruju MRI senzori. Vrijeme koje je potrebno da se ovi protoni ponovo poravnaju sa linijama magnetnog polja, kao i količina energije koju oslobode, zavise najviše od hemijske strukture okoline, pa su ovi parameti jako bitni jer se na osnovu njih mogu razlikovati razni tipovi tkiva [37]-[39].



Slika 3.1: Uticaj radiofrekvencije na protone u molekulima vode

Savremeni MRI uređaji uglavnom sadrže cijev u kojoj se nalazi tijelo pacijenta. Tu se pacijent izlaže magnetnom polju uređaja. Po jačini magnetnog polja uređaje dijelimo na:

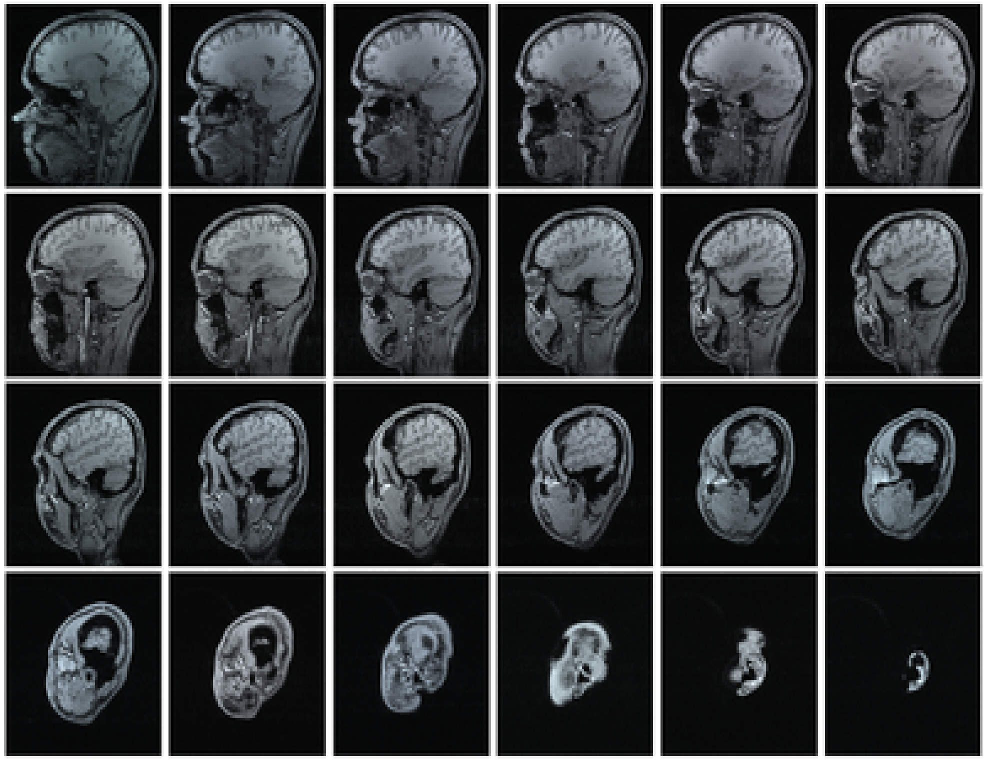
- MRI slabog polja jačine - 0,15 T do 0.5 T
- MRI srednjeg polja jačine - 0.5 T do 1 T
- MRI visokog polja jačine - 1 T do 3 T
- MRI eksperimentalnog tipa - više od 3 T.

Na slici 3.2 se nalazi serija snimaka glave napravljenih pomoću MRI uređaja.

MRI ima visoku osjetljivost u otkrivanju tumora, kao i kod identifikacije određenih vrsta preloma.

Pošto su slike magnetne rezonanse jako bitne sa aspekta detekcije bolesti kod pacijenata, njihov kvalitet mora biti zadovoljavajućeg stepena. Sam proces obavljanja MRI procedure je spor, što predstavlja ozbiljnu manu.

Ima par glavnih uzročnika lošije slike magnetene rezonanse. Prvi, moguća neispravnost samog MRI uređaja da načini dovoljno kvalitetnu sliku. Drugi, faktori okoline, kao temperatura



Slika 3.2: Snimci glave[1]

ambijenta ili količina električnih uređaja u prostoriji. Treće, neposlušnost samog pacijenta. Od pacijenata se zahtijeva da miruju dok traje procedura, ukoliko se meškolje ili pokreću, slika može biti lošijeg kvaliteta. U ovim slučajevima, da se procedura ne bi ponavljala, CS pristiže u pomoć. Samim tim se može smanjiti vremenski period izlaganja pacijenata MRI uređaju, jer nije neophodno da se obavlja velik broj mjerenja, već kao što je rečeno u teoriji o CS-u, dovoljan je mali broj mjerenja da bi se obavila rekonstrukcija.

Dakle, primjena CS kod MRI može drastično smanjiti vrijeme trajanja procedure, što je od koristi i pacijentima i doktorima.

3.2 X-ray

X-zraci (*X-ray*) su elektromangentni talasi sa talasnom dužinom u rasponu 10^{-8} - 10^{-12} m, frekvencijama od 10^{16} - 10^{20} Hz i prosječnim energijama od 100 eV - 100 keV. Kao takvi, prolaze kroz većinu obekata, uključujući i ljudsko tijelo. U medicini se koriste radi generisanja X-ray slika u procesu koji se zove radiografija.

[1]Slika preuzeta sa stranice *https://nuscimagazine.com/how-ai-can-improve-mri-imaging-speed/* dana 24.01.2023. godine

Aparatura neophodna za proces stvaranja X-ray slika se sastoji od izvora i detektora zračenja. Ljudsko tijelo se pozicionira između navedena dva uređaja. X-zraci putuju od izvora i prolaze kroz ljudsko tijelo, gdje bivaju apsorbovani u različitim količinama u različitim tipovima tkiva, u zavisnosti od radiološke gustine samih tkiva, da bi detektor registrovao određenu količinu zračenja radi generisanja slike koja predstavlja sijenku tkiva i objekata u tijelu. Na primjer, kosti imaju visoku radiološku gustinu zbog koncentracije kalcijuma, pa bolje apsorbuju X-zrake, što rezultira da one na X-ray slikama budu svjetlije u odnosu na ostala tkiva i objekte koja imaju manju radiološku gustinu (mišići, masti, pluća), te apsorbuju manje X-zračenja, pa su na X-ray slikama prikazani u nijansama sivo-crne boje [40]-[42].

Slika 3.3: Prikaz X-ray snimka ljudskih pluća. Kosti grudnog koša se prikazuju svijetlim bojama, dok su plućna tkiva prikazana tamnijim bojama[2]

Zahvaljujući mogućnosti prikazivanja unutrašnjosti tijela, X-ray slike se u medicini koriste radi detektovanja polomljenih kostiju, tumora, izraslina, stranih tijela, kvarova na zubima, pneumonije...

Pored navedenoga, koristi se kod:

[2]Slika preuzeta sa stranice *https://unsplash.com/s/photos/x-ray* dana 25.01.2023. godine

- **Fluoroskopije**, gdje se uz pomoć X-zraka stvaraju slike pokreta unutar tijela (otkucaji srca, kretanje krvi kroz arterije).
- **Mamografije**, gdje se mogu detektovati abnormalne izrasline u dojkama.
- **Kompjuterizovane tomografije**, gdje se kombinuje X-ray proces sa računarskom obradom radi dobijanja niza slika koje se kombinuju i stvaraju 3D X-ray prikaz.

X-zraci produkuju jonizujuće zračenje koje može imati negativan uticaj na živa bića jer može izazvati pojavu malignih oboljenja. Sa većim brojem ponavljanja X-ray procedure u toku života, pacijentima raste vjerovatnoća razvijanja nekog oblika kancera, iako je ta vjerovatnoća relativno niska. Postavlja se pitanje da li je neophodno izlagati pacijenta duže vremena ovom obliku zračenja? Primjena CS-a bi mogla skratiti vremensko izlaganje pacijenta zračenju, bez degradacije kvaliteta generisanih slika.

3.3 Kompjuterizovana tomografija

Kompjuterizovana tomografija (*Computed Tomography - CT*) predstavlja kompjuterizovanu X-ray proceduru gdje se prikupljeni signali procesuiraju radi generisanja slika poprečnog presjeka tijela.Pacijent leži na krevetu koji se sporo kreće u tunelu u kojemu se izlaže pramenima X-zraka čiji izvor brzo rotira oko tijela pacijenta. CT skeneri imaju posebne X-ray digitalne detektore koji su pozicionirani suprotno od X-ray izvora. Kada X-zraci prođu kroz tijelo pacijenta, bivaju pokupljeni od strane digitalnog detektora odakle se prosljeđuju signali ka računaru. Svaki put kada izvor X-zraka napravi jednu punu rotaciju, računar na osnovu svoje softverske logike konstruiše dvodimenzionalnu sliku poprečnog presjeka tijela. Ova procedura se ponavlja sve do željenog broja slika.

Na osnovu prethodno navedenoga, osnovni problem u tomografiji se sastoji od nalaženja načina da se rekonstruiše 2D slika na osnovu niza 1D projekcija i uglova iz kojih su te projekcije uzete. Recimo da imamo objekat u prostoru koji je opisan funckijom $f(x, y)$. Tada se projekcija funkcije $f(x, y)$ duž nasumičnog pravca koji je definisan uglom φ opisuje kao:

$$p_\varphi(t) = \int_{l(\varphi,t)} f(x, y)\, dl, \quad gdje \quad je \quad l(\varphi, t) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t = x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi)\}. \quad (3.1)$$

Relacija (3.1) se može zapisati i kao:

$$p_\varphi(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) - t)\,dx\,dy, \tag{3.2}$$

što predstavlja Radonovu transformaciju duž linije l. Skup svih $p_\varphi(t)$ za svako φ se naziva Radonovom transformacijom slike $f(x,y)$.

Slika 3.4: CT slika abdomena[3]

Dobijene slike se mogu prikazati pojedinačno ili se mogu računarski "posložiti"radi dobijanja 3D prikaza, što je korisno zbog mogućnosti rotiranja 3D prikaza, pa je unutrašnjost ljudskog tijela bolje prikazana, što pomaže doktorima prilikom dijagnostike [43],[44]. Samim tim mogu dati tačniju kliničku sliku pacijenta u odnosu na tradicionalni X-ray pristup.

Sam detaljniji prikaz omogućuje detektovanje sitnih povreda, krvnih ugrušaka, viška tečnosti, tumora, fraktura...

Određeni zdravstveni rizici postoje, iako su minorni, zbog izlaganja jonizujućem zračenju. Oni su pobrojani u poglavlju o X-ray slikama.

Analogno već diskutovnim primjenama CS-a kod MRI i X-ray slika, kod CT procedure se na isti način može primijenti CS postupak radi skraćenja procedure što bi rezultovalo kraćem izlaganju pacijenata jonizujućem zračenju.

[3]Slika preuzeta sa stranice *https://www.healthline.com/health/ct-scan* dana 26.01.2023. godine

4 Algoritmi za rekonstrukciju

Kao što je već pomenuto u prethodnim poglavljima, CS je jako popularna tehnika u obradi signala jer predstavlja alternativu tradicionalnom pristupu koja omogućuje uspješnu rekonstrukciju signala na osnovu značajno redukovanog broja odbiraka. Zbog svoje široke primjene i popularnosti, značajan broj različitih algoritama se pojavio da bi odgovorili raznim izazovima u mnogim oblastima koje zahtijevaju obradu signala, od jednodimenzionalnih signala, preko slika do video aplikacija. Postoje nekolike grupe algoritama kao što su algoritmi konveksne optimizacije, *greedy* algoritmi, *Sparse Bayesian learning* algoritmi... U nastavku će biti opisani karakteristični predstavnici nekih od navedenih grupa.

4.1 Basis Pursuit

Basis Pursuit (BP) pripada grupi konveksnih algoritama, zajedno sa LASSO(*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*), LARS(*Least Angle Regression*), adaptivnim gradijentnim algoritmom... Pristupi koji rješavaju problem konveksne optimizacije su računski efikasniji u odnosu na nekonveksne. BP pristup je baziran na konveksnoj ℓ_1 minimizaciji koja je definisana formulacijom (2.9). On vrši dekompoziciju signala na superpoziciju onih elemenata čiji koeficijenti imaju najmanju ℓ_1- normu [2],[3],[13]. Problem (2.9) se može drugačije zapisati kao:

$$\min_{t} \sum t, \quad da \quad je \quad -t \leq \mathbf{x} \leq t, \mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}, \tag{4.1}$$

gdje je promjenjiva t uvedena da bi se izbjegla apsolutna vrijednost $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{N} |\mathbf{x}_i|$. BP se može riješiti koristeći *primal-dual interior point* metodu (Algoritam 1).

Algoritam 1 Primal-dual interior point metoda

1: Polazeći od $\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}$, postaviti da je $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$.
2: Postaviti $t_0 = \zeta|\mathbf{x}_0| + \chi max\{|\mathbf{x}_0|\}$. ▷ Parametre ζ i χ prethodno definiše korisnik.
3: Formirati Lagranžovu funkciju:
$$L\left(\mathbf{x}, t, r, \frac{-1}{\mathbf{x}_0 - t_0}, \frac{1}{\mathbf{x}_0 + t_0}\right) = f(t) + r(\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{\mathbf{x}-t}{\mathbf{x}_0 - t_0} - \frac{\mathbf{x}+t}{\mathbf{x}_0 + t_0},\ r = -\mathbf{F}\left(\frac{-1}{\mathbf{x}_0 - t_0} + \frac{1}{-\mathbf{x}_0 - t_0}\right).$$
4: Ažurirati svaki element funkcije (3) za dužinu stope (κ) koja se računa putem traženja linija unazad (*backtracking line search*), i pravac stope (Δ), koji se dobija nalaženjem prvog izvoda funkcije L po njenim argumentima.

4.2 Adaptivni gradijentni algoritam

Navedeni algoritam takođe pripada konveksnim optimizacionim metodama. Iako neki pristupi koriste ℓ_0-normu, ona je računski zahtjevan optimizacioni problem, pa je ℓ_1-norma daleko češće korišćen optimizacioni pristup [13],[45],[46]. Algoritam za jednodimenzionalni signal je dat u Algoritmu 2.

Algoritam 2 Adaptivni gradijentni algoritam

Ulaz: Posmatramo signal $y(n)$ dužine N kod kojega je broj dostupnih odbiraka N_A, a broj nedostajućih odbiraka N_Q.

$y^{(0)}(n) \leftarrow y(n)$ $\quad \triangleright\ n \notin N_Q$
$y^{(0)}(n) \leftarrow 0$ $\quad \triangleright\ n \in N_Q$
$m \leftarrow 0$
$\Delta \leftarrow max|y^{(0)}(n)|$
repeat
  $y^{(p)}(n) = y^{(m)}(n)$ $\quad \triangleright$ za svako n
  repeat
    $m \leftarrow m + 1$
    for $n_i \leftarrow 0$ `to` $N - 1$ **do**
      if $n_i \in N_Q$ **then**
        $X^+(k) \leftarrow DFTy^{(m)}(n) + \Delta\delta(n - n_i)$
        $X^-(k) \leftarrow DFTy^{(m)}(n) - \Delta\delta(n - n_i)$
        $g^{(m)}(n_i) \leftarrow \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X^+(k)| - |X^+(k)|$
      else
        $g^{(m)}(n_i) \leftarrow 0$
      end if
      $y^{(m+1)}(n_i) \leftarrow y^{(m)}(n_i) - g^{(m)}(n_i)$
    end for
    $\beta_m = arccos\frac{\sum_{n=0}^{N-1} g^{(m-1)}(n)g^{(m)}(n)}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1}\left(g^{(m-1)}(n)\right)^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1}\left(g^{(m)}(n)\right)^2}}$
  until $\beta_m < 170°$
  $\Delta \leftarrow \frac{\Delta}{\sqrt{10}}$
  $R = 10log_{10}\frac{\sum_{n\in N_Q}|y^{(p)}(n)-y^{(m)}(n)|^2}{\sum_{n\in N_Q}|y^{(m)}(n)|^2}.$
until $R < R_{max}$
return $y^{(m)}(n)$

Izlaz: Rekonstruisani signal $y_R(n) = y^{(m)}(n)$

Kod njega se vrši rekonstrukcija signala sa nasumice pozicioniranim nedostupnim odbircima, dok inicijalno počinje sa odabranim vrijednostima za dostupne odbirke. Ta inicijalna vrijednost dostupnih odbiraka se iterativno mijenja za $+\Delta$ i $-\Delta$, a sama koncentracija unapređenja se mjeri u domenu u kojemu signal ispoljava svojstvo rijetkosti. Vektor gradijenta se dobija kao razlika između ℓ_1- norme vektora promijenjenih za $+\Delta$ i vektora promijenjenih za $-\Delta$, pa se vrijednost ovog gradijenta koristi radi ažuriranja vrijednosti nedostajućih odbiraka signala.

4.3 Orthogonal Matching Pursuit

Orthogonal Matching Pursuit (OMP) pripada *greedy* algoritmima koji su računski manje kompleksni, pa samim tim i brži u izvršavanju ali i manje precizni, u odnosu na algoritme bazirane na ℓ_1- normi. *Greedy* algoritmi nalaze elemente transformacione matrice koji kroz iteracije najbolje odgovaraju originalnom signalu. [13] OMP postupak je dat u Algoritmu 3.

Algoritam 3 Orthogonal Matching Pursuit

Ulaz: Iz formulacije $\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ imamo transfomacionu matricu $\mathbf{F} = \Phi\Psi$. *Početna inicijalizacija*: inicijalni ostatak $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, inicijalno rješenje $\mathbf{X}_0 = 0$, matrica odabranih atoma $\mathbf{\Gamma}_0 = []$ i broj iteracija P.

repeat
- $\upsilon_n = arg\max_{i=1,\dots,M} \left|\left\langle \mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{F}_i \right\rangle\right|$ ▷ Nalaženje maksimalne korelacione kolone
- $\mathbf{\Gamma}_n \leftarrow \left[\mathbf{\Gamma}_{n-1}\mathbf{F}_{\upsilon_n}\right]$ ▷ Ažuriranje matrice odabranih atoma
- $\mathbf{X}_n = arg\min_{\mathbf{X}} \left\|\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{\Gamma}_n\mathbf{X}_{n-1}\right\|_2^2$ ▷ Rješavanje problema najmanjih kvadrata
- $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{\Gamma}_n\mathbf{X}_{n-1}$ ▷ Ažuriranje ostatka
- $n = n + 1$

until (kriterijum zaustavljanja)

Izlaz: $\mathbf{X}_p$ i $\mathbf{r}_p$.

4.4 Iterativni algoritam sa tvrdim pragom

Algoritmi sa pragom (*Thresholding algorithms*) su bazirani na adaptivnom pragu koji se primjenjuje kroz nekoliko iteracija. Značajno su brži u odnosu na konveksne pristupe [3],[13],[47]. Jedna iteracija se može definisati preko funkcije praga kao:

$$x_i = V_\varepsilon(f(X_{i-1})), \tag{4.2}$$

gdje je V_ε funkcija praga, f je funkcija koja modifikuje izlaz prethodne iteracije a $\mathbf{X}$ je vektor koji zadovoljava osobinu rijetkosti u originalnom ili nekom transformacionom domenu.

Signal se na osnovu mjerenja može rekonstruisati putem algoritma sa tvrdim (*hard*) ili algoritma sa mekim(*soft*) pragom.

Iterativni algoritam sa tvrdim pragom postavlja sve osim S najvećih komponenti (po opsegu veličina signala $\mathbf{X}$) na nulu. Tada se tvrda funkcija praga H_S definiše kao:

$$H_S(\mathbf{X}) = \begin{cases} X_i, & \left|X_i\right| > \varepsilon \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases}, \tag{4.3}$$

gdje je ε S-ta najveća komponenta u $\mathbf{X}$. Procedura iterativnog algoritma sa tvrdim pragom je data Algoritmom 4.

Algoritam 4 Iterativni algoritam sa tvrdim pragom

Ulaz: $\mathbf{y}$ je vektor mjerenja a $\mathbf{F}$ je CS matrica. Neka je signal S-rijedak.

$\mathbf{X}_0 \leftarrow 0$
for $i = 1, ..., (kriterijum \quad zaustavljanja)$ **do**
  $\mathbf{X}_i \leftarrow H_S\Big(\mathbf{X}_{i-1} + \mathbf{F}^T(\mathbf{y} - \mathbf{F}\mathbf{X}_{i-1})\Big)$
end for
return $\hat{\mathbf{X}} \leftarrow \mathbf{X}_i$

Izlaz: Aproksimacija signala $\hat{\mathbf{X}}$.

4.5 Pristup naizmjenične metode množitelja

U posljednjoj decniji, zbog porasta u veličini i kompleksnosti savremenih struktura podataka, mnogi problemi u mašinskom učenju, statistici i digitalnoj obradi signala se mogu predstaviti u okvirima konveksne optimizacije. Kao jedna od pristupa za distribuiranu konveksnu optimizaciju, metoda naizmjeničnih množitelja (*Alternating Direction Method of Multipliers*, u nastavku ADMM) se pokazuje kao podesna za razrješenje navedenih problema.

ADMM pristup je razvijen tokom sedamdesetih godina prošlog vijeka, s time što je matematička podloga definisana pedesetih godina i slična je ili ekvivalentna sa velikim brojem drugih pristupa kao što su dualna dekompozicija, cijepanje po Daglas-Račfordu (*Douglas–Rachford splitting*), Djikstrine naizmjenične projekcije (*Dykstra's alternating projections*), Bergmanovi iterativni algoritmi za ℓ_1 probleme, proksimalne metode...

Prije samog matematičkog definisanja ADMM pristupa, neophodno je navesti određene optimizacione algoritme koji predstavljaju njegovu preteču [48]-[50]:

Dualni uspon (*Dual Ascent*)

Posmatrajmo konveksnu funkciju $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sa promjenljivom $x \in \mathbf{R}^n$. Problem konveksne optimizacije možemo prikazati kao:

$$\textit{minimize} \;\; f(x) \;\; \textit{pod} \;\; \textit{uslovom} \;\; Ax = b, \tag{4.4}$$

gdje je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Lagranžijan za navedeni problem je:

$$L(x, y) = f(x) + y^T(Ax - b), \tag{4.5}$$

dok je dualna funkcija:

$$g(y) = \underset{x}{inf} L(x, y) = -f^*(-A^T y) - b^T y, \tag{4.6}$$

gdje je y dualna varijabla (Lagranžov množitelj), a f^* je konveksni konjugat. Dualni problem se sastoji u maksimiziranju $g(y)$, s time da je $y \in \mathbf{R}^m$. Uz pretpostavku da su optimalne vrijednosti primarnog i dualnog problema jednake, možemo povratiti primarnu optimalnu tačku x^* od dualne optimalne tačke y^* kao:

$$x^* = \underset{x}{argmin} L(x, y^*), \tag{4.7}$$

u slučaju kada postoji samo jedan minimizator za $L(x, y^*$.

Kod metode dualnog uspona, dualni problem se rješava gradijentnim usponom (*gradient ascent*). Pod pretpostavkom da je g diferencijabilno, gradijent $\nabla g(y)$ se nalazi tako što se prvo nađe $x^+ = \underset{x}{argmin} L(x, y)$, pa se onda nađe $\nabla g(y) = Ax^+ - b$, što predstavlja ostatak za ograničenje jednakosti. Metoda dualnog uspona se sastoji od ažuriranja kroz iteracije:

$$x^{k+1} := \underset{x}{argmin} L(x, y^k), \tag{4.8}$$

$$y^{k+1} := y^k + \alpha^k (Ax^{k+1} - b), \tag{4.9}$$

gdje je $\alpha^k > 0$ veličina koraka. Prvi korak (4.8) predstavlja x-minimizacioni korak, dok drugi korak (4.9) predstavlja ažuriranje dualne promjenljive. Uz odgovarajući odabir α^k, dualna funkcija se uvećava sa svakim korakom $g(y^{k+1}) > g(y^k)$.

Uz odgovarajuće odabrano α^k i ostale prethodno navedene pretpostavke, tada x^k konvergira ka optimalnoj tački i y^k konvergira ka optimalnoj dualnoj tački. Međutim, u mnogim aplikacijama, navedene pretpostavke nijesu ispunjene, pa se dualni uspon ne može koristiti.

Dualna dekompozicija (*Dual Decomposition*)

Uzmimo da je funkcija f separabilna. Tada je:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i), \tag{4.10}$$

gdje je $x = (x_1, ..., x_N)$, dok su $x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$ subvektori x-a. Particionisanjem matrice $A = [A_1, ..., A_N]$, tako da je $Ax = \sum_{i=1}^{N} A_i x_i$, Lagranžijan se zapisuje na sljedeći način:

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^{N} L_i(x_i, y) = \sum_{i=1}^{N} (f_i x_i + y^T A_i x_i - \frac{1}{N} y^T b). \tag{4.11}$$

Dakle, algoritam dualne dekompozicije se definiše kao:

$$x_i^{k+1} := \underset{x_i}{argmin} L_i(x_i, y^k), \tag{4.12}$$

$$y^{k+1} := y^k + \alpha^k (Ax^{k+1} - b). \tag{4.13}$$

Korak za x-minimizaciju (4.12) se odvija u paraleli, nezavisno, za svako $i = 1, ..., N$. U koraku dualnog ažuriranja (4.13), rezidualni doprinosi Ax^{k+1} se prikupljaju da bi se izračunao ostatak $Ax^{k+1} - b$.

Kada je globalna dualna promjenljiva y^{k+1} izračunata, ona se prosljeđuje procesorima koji obavljaju N individualnih x_i minimizacionih koraka.

Augmentovani Lagranžijani i metoda množitelja

Augmentovane Lagranžove metode su razvijene da bi doprinijele robusnosti metodi dualnog uspona, kao i da doprinesu konvergenciji bez pretpostavki da funkcija f mora biti konveksna. Augmentovani Lagranžijan za (4.4) je:

$$L_\rho(x, y) = f(x) + y^T(Ax - b) + \frac{\rho}{2} ||Ax - b||_2^2, \tag{4.14}$$

gdje je $\rho > 0$ kazneni parametar (*penalty parameter*). Prednost uključivanja kaznenog parametra se ogleda u tome što se g_ρ može predstaviti kao diferencijabilna pod slabim uslovima. Gradijent augmentovane dualne funkcije se nalazi na isti način kao kod običnog Lagranžijana. Ukoliko na ovaj modifikovani problem primijenimo metodu dualnog uspona, dobijamo algoritam:

$$x_i^{k+1} := \underset{x}{argmin} L_\rho(x, y^k), \tag{4.15}$$

$$y^{k+1} := y^k + \rho(Ax^{k+1} - b). \tag{4.16}$$

Navedeni algoritam predstavlja metodu množitelja za rješavanje (4.4). Navedeno je isto kao i standardni dualni uspon, osim što korak za x-minimizaciju koristi augmentovani Lagranžijan, i što je kazneni parametar ρ korišćen umjesto veličine koraka α^k. Metoda množitelja konvergira pod mnogo generalnijim uslovima u odnosu na dualni uspon, što uključuje slučajeve kada f nije striktno konveksna.

Međutim, unaprijeđena svojstva konvergencije dolaze pod cijenom, jer ukoliko je f separabilna funkcija, onda augmentovani Lagranžijan L_ρ nije separabilan pa korak za x-minimizaciju definisan sa (4.15) ne može biti izvršen odvojeno za svako x_i, što za posljedicu ima da se osnovna metoda množitelja ne može iskoristiti za dekompoziciju.

Nakon što su definisana prethodna tri optimizaciona algortima, može se definisati matematička podloga za ADMM pristup. ADMM kombinuje dualni uspon sa odličnim osobinama konvergencije metode množitelja. On rješava problem definisan sljedećom formom:

$$minimize \;\; f(x) + g(z) \;\; pod \;\; uslovom \;\; Dx + Ez = c, \tag{4.17}$$

gdje je $x \in \mathbf{R}^n$, $z \in \mathbf{R}^m$, $D \in \mathbf{R}^{p \times n}$, $E \in \mathbf{R}^{p \times m}$ i $c \in \mathbf{R}^p$. Pretpostavimo da su funkcije f i g konveksne. Jedina razlika u odnosu na generalni problem definisan sa (4.4) je taj što je promjenljiva x sada razbijena na dva dijela (*splitting*), x i z. Optimalna vrijednost problema (4.17) se opisuje kao:

$$p^* = inf\{f(x) + g(z) \;\;|\;\; Dx + Ez = c\}. \tag{4.18}$$

Augmentovani Lagranžijan je sada:

$$L_\rho(x, z, y) = f(x) + g(z) + y^T(Dx + Ez - c) + \frac{\rho}{2}||Dx + Ez - c||_2^2. \tag{4.19}$$

Nakon prethodno definisanog formalizma, mogu se definisati iteracije za ADMM:

$$x^{k+1} := \underset{x}{argmin} L_\rho(x, z^k, y^k), \tag{4.20}$$

$$z^{k+1} := \underset{z}{argmin} L_\rho(x^{k+1}, z, y^k), \tag{4.21}$$

$$y^{k+1} := y^k + \rho(Dx^{k+1} + Ez^{k+1} - c), \tag{4.22}$$

gdje je $\rho > 0$. Evidente su sličnosti sa dualnim usponom i metodom množitelja: korak za x-minimizaciju (4.20), korak za z-minimizaciju (4.21) i ažuriranje dualne promjenljive (4.22). Kod ADMM-a, varijable x i z se ažuriraju naizmjenično, odakle je ovaj pristup i dobio ime. Razdvajanje minimizacije preko x-a i z-a u dva koraka je upravo ono što dozvoljava dekompoziciju onda kada su funkcije f i g separabilne. Stanje ADMM-a se čuva u z^k i y^k, što znači da je (z^{k+1}, y^{k+1}) funkcija od (z^k, y^k). Promjenljiva x^k nije dio stanja, već predstavlja posredni rezultat izračunat u prethodnom stanju (z^{k-1}, y^{k-1}).

ADMM se može zapisati u drugačijoj i često pogodnijoj skaliranoj formi. Neka je ostatak r definisan kao $r = Dx + Ez - c$. Tada je:

$$y^T r + \frac{\rho}{2}||r||_2^2 = \frac{\rho}{2}||r + \frac{1}{\rho}y||_2^2 - \frac{1}{2\rho}||y||_2^2 = \frac{\rho}{2}||r + u||_2^2 - \frac{\rho}{2}||u||_2^2, \tag{4.23}$$

gdje je $u = \frac{1}{\rho}y$ skalirana dualna promjenljiva. Sada pomoću nje možemo zapisati iteracije ADMM-a na sljedeći način:

$$x^{k+1} := \underset{x}{argmin}\Big(f(x) + \frac{\rho}{2}||Dx + Ez^k - c + u^k||_2^2\Big), \tag{4.24}$$

$$z^{k+1} := \underset{z}{argmin}\Big(g(z) + \frac{\rho}{2}||Dx^{k+1} + Ez - c + u^k||_2^2\Big), \tag{4.25}$$

$$u^{k+1} := u^k + Dx^{k+1} + Ez^{k+1} - c. \tag{4.26}$$

Prva forma ADMM-a (4.20 - 4.22) se naziva neskaliranom, dok se forma (4.24 - 4.26) naziva skaliranom. Obje forme su ekvivalentne, s time što je skalirana forma obično kraća u odnosu na neskaliranu, pa je češće korišćena.

ADMM postiže korektnu preciznost za par desetina iteracija, dok relativno spora konvergencija ograničava njegovu upotrebu u nekim situacijama gdje je neophondo postići veliku preciznost za kratko vrijeme.

ADMM pristup je primjenjivan u velikom broju oblasti, od kojih najviše u oblastima mašinskog učenja, jer ono zavisi od optimizacionih algoritama, statistike, pametnih električnih mreža, optimizacionih problema, aplikacijama sa velikim brojem podataka [51]-[55]...

5 Eksperimentalni rezultati

U ovom poglavlju će biti izloženi i analizirani rezultati primjene kompresivnog odabiranja nad oštećenim biomedicinskim slikama. ADMM pristup je prilagođen da bi obrađivao biomedicinske slike. Posmatrane su tri klase slika (MRI, X-ray i CT), sa po dvije slike u svakoj klasi. U te svrhe je korišćeno Matlab okruženje, na uređaju sa sljedećim specifikacijama: AMD Ryzen 5 4600H 3.00 GHz procesor, Nvidia GeForce GTX 1650 Ti grafička kartica i 16 GB RAM-a.

Slike će imati različite stepene oštećenja (40%, 55%, 70%, 85% nedostajućih piksela), kao i različite rezolucije (500x500, 1000x1000, 1500x1500). Oštećenje slika se obavlja na nasumičan način, koristeći ugrađenu Matlab funkciju koja zadati procenat piksela postavlja na nulu (oni su obojani crnom bojom).

Pored promjenljivog stepena oštečenja i promjenljive rezolucije, slike će biti tretirane u različitim transformacionim domenima. Biće testirane DCT i DWT. Unutar DWT-a će biti obrađene tri familije wavelet filtara, Daubechies, Coiflet i Symlet, sa po tri predstavnika za svaki tip wavelet-a (različiti nestajući momenti).

Takođe, uz dva transformaciona domena, oštećene slike će biti rekonstruisane uz pomoć dvije različite norme, TV minimizacije i ℓ_{21}-norme.

Sve kombinacije oštećenja, rezolucija, transformacionih domena i optimizacionih normi će biti testirane radi nalaženja one varijante koja daje najbolje rezultate.

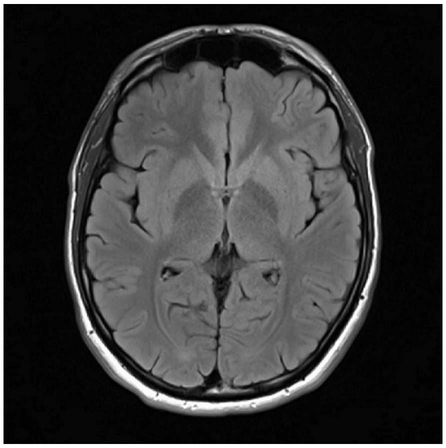
Rezultati se ogledaju u vremenu izvršavanja rekonstrukcije i kvalitetu rekonstrukcije slike. Kvalitet rekonstrukcije se računa odnosom signal-šum, tj. PSNR-om (*Peak Signal-To-Noise Ratio*), koji se računa po formuli:

$$PSNR = 20log_{10}\frac{O_{max}}{\sqrt{\frac{1}{MN}\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}[I_o(i,j)-I_r(i,j)]^2}}, \tag{5.1}$$

gdje je O_{max} maksimalna vrijednost osvjetljaja slike, M i N dimenzije slike, a I_o i I_r originalna, odnosno rekonstruisana slika.

5.1 MRI

Slike koje će biti korišćene u svrhe testiranja su prikazane slikama 5.1 i 5.2.



Slika 5.1: MRI mozga[4]

Slika 5.2: MRI koljena[5]

U kodu koji predstavlja implementaciju ADMM pristupa je postavljen broj iteracija na 25. U nastavku će biti predstavljeni i diskutovani rezultati testiranja u tabelarnom i grafičkom prikazu.

Transformacioni domen - DCT

U tabeli 1 su dati rezultati primjene ADMM pristupa u rekonstrukciji slika magenetne rezonanse koje su imale različite stepene oštećenja i promjenljive rezolucije. Transformacioni domen je DCT, dok je primijenjena optimizaciona norma TV minimizacija.

25 iteracija, TV minimizacija					
Slika	**Domen**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Mozak	DCT	500x500	40	16.7964	30.7544
		1000x1000		63.2234	35.9575
		1500x1500		151.6918	38.4495
		500x500	55	15.36	28.6422
		1000x1000		63.9027	33.5161
		1500x1500		146.6582	35.9931
		500x500	70	16.0769	26.0868
		1000x1000		64.0709	30.6306
		1500x1500		146.6812	32.9314
		500x500	85	17.2737	21.8605
		1000x1000		64.2803	25.1929
		1500x1500		159.102	26.5863
Koljeno		500x500	40	18.7453	27.8341
		1000x1000		75.0927	31.6803
		1500x1500		171.0069	34.3641
		500x500	55	19.0246	26.2363
		1000x1000		78.1382	29.4794
		1500x1500		194.1227	31.7761
		500x500	70	20.0213	24.6333
		1000x1000		80.5094	27.2003
		1500x1500		185.511	28.9017
		500x500	85	21.8302	21.7071
		1000x1000		83.1183	23.3515
		1500x1500		193.2279	24.1146

Tabela 1: Rezultati MRI rekonstrukcije, sa korišćenim DCT domenom i TV minimizacijom

[4]Slika preuzeta sa stranice *https://radiopaedia.org/cases/acoustic-schwannoma-15* dana 01.02.2023. godine

[5]Slika preuzeta sa stranice *https://radiopaedia.org/cases/complete-acl-tear-with-important-associated-injuries* dana 01.02.2023. godine

Vidljivo je da sa porastom rezolucije slike, vrijeme potrebno za izvršavanje zadatih 25 iteracija raste. Uočljiva je velika razlika u vremenu izvršavanja za najnižu i najvišu rezoluciju. Kvalitet rekonstrukcije je u većini slučajeva bio na zadovoljavajućem nivou, od oko ili više od 30 dB. Sa porastom rezolucije raste i PSNR za isti procenat oštećenja. Sa porastom stepena oštećenja slike, PSNR opada, i za najveće oštećenje od 85% je u potpunosti ispod 30 dB, pa je vidljiva degardacija slike nakon rekonstrukcije. Opšti zaključak na osnovu rezultata je da ADMM pristup, u kombinaciji DCT domena i TV minimizacije, ima dobre performanse za stepen oštećenja do oko 70%, odakle je sa porastom oštećenja prisutna blaga zamućenost slike, iako su i dalje uočljivi detalji.

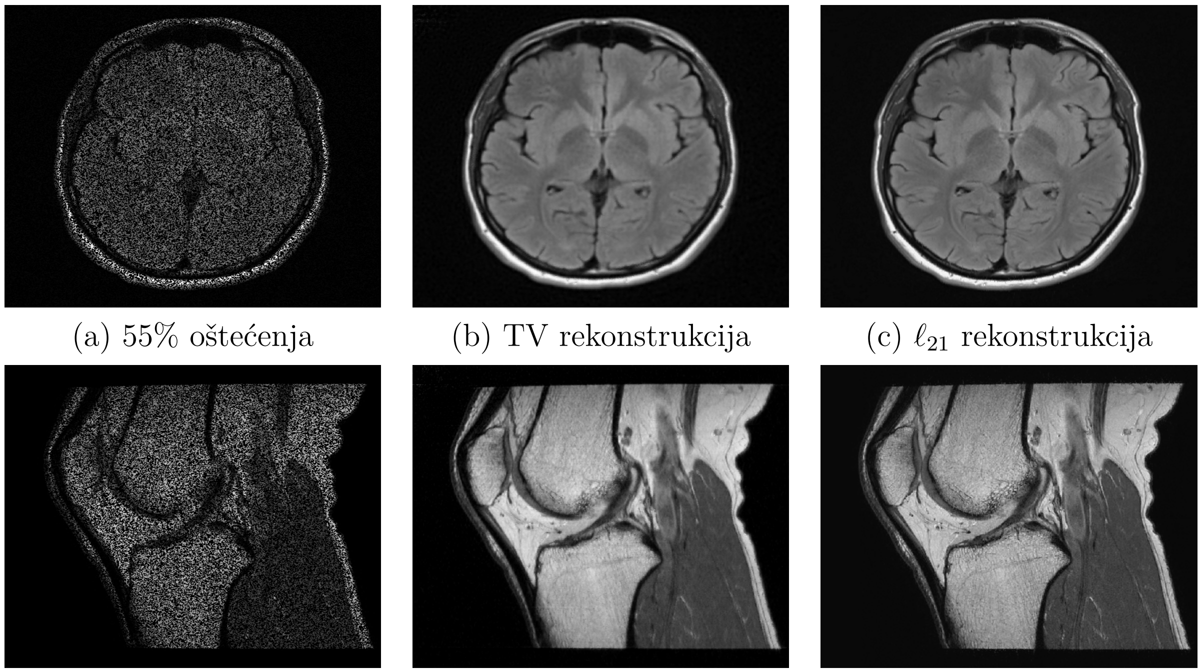
U tabeli 2 je data sličan prikaz, samo što je umjesto TV minimizacije korišćena ℓ_{21}-norma.

25 iteracija, ℓ_{21}-norma					
Slika	**Domen**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Mozak	DCT	500x500	40	3.8945	34.6942
		1000x1000		13.153	45.8925
		1500x1500		33.4854	49.9259
		500x500	55	3.6182	30.6396
		1000x1000		11.6033	40.4365
		1500x1500		33.3996	45.096
		500x500	70	4.3862	26.3931
		1000x1000		12.2143	32.1689
		1500x1500		33.4931	32.3204
		500x500	85	5.2778	20.3202
		1000x1000		11.5753	20.316
		1500x1500		33.3952	19.238
Koljeno		500x500	40	4.4398	30.1783
		1000x1000		12.0894	37.7001
		1500x1500		39.6576	43.1349
		500x500	55	3.2697	27.502
		1000x1000		12.2381	33.3773
		1500x1500		39.5191	36.8455
		500x500	70	3.9481	24.7015
		1000x1000		11.7937	27.1923
		1500x1500		38.3535	25.6899
		500x500	85	4.3577	18.9587
		1000x1000		12.144	17.8279
		1500x1500		37.8999	16.5659

Tabela 2: Rezultati MRI rekonstrukcije, sa korišćenim DCT domenom i ℓ_{21}-normom

Slični zaključci se mogu izvesti i za slučaj kada TV minimizaciju zamijenimo sa ℓ_{21}-normom. Evidneta razlika je u vremenu izvršavanja, gdje je izvršavanje koristeći ℓ_{21}-normu u prosjeku skoro pet puta brže u odnosu na izvršavanje koristeći TV minimizaciju. PSNR je za niža oštećenja slike (do 55%) veći u odnosu na vrijednosti u tabeli 1, dok za veća oštećenja (preko 85%) daje lošije rezultate, i za razliku od trenda rasta sa porastom rezolucije sa TV minimizacijom, kod ℓ_{21}-norme se bilježi trend pada kvaliteta rekonstrukcije.

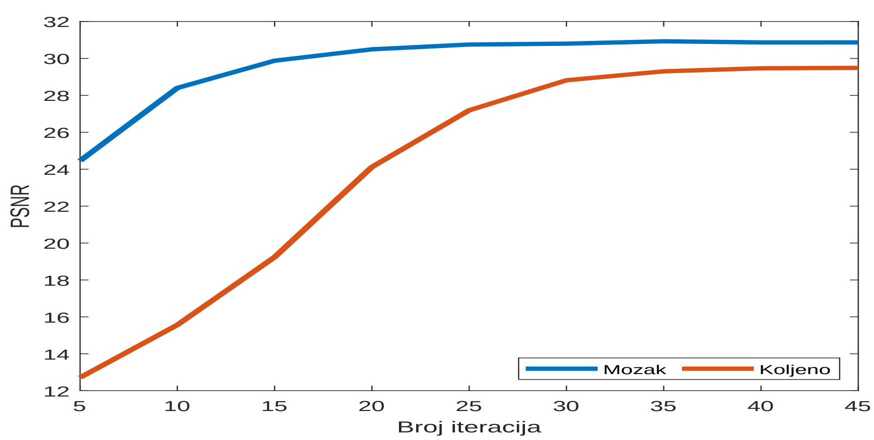
Na slici 5.3 je data vizuelna reprezentacija rekonstrukcije nad slikama rezolucije 1000x1000. Grafički prikaz promjene PSNR-a sa porastom broja iteracija je dat grafikom prikazanim na slici 5.4. Za sliku mozga je korišćena 500x500 rezolucija sa TV minimizacijom i oštećenjem od 40%, dok je za sliku koljena korišćena 1000x1000 rezolucija, sa ℓ_{21}-normom i oštećenjem od 70%. Zasićenje se postiže između 25 i 30 iteracija, odakle gotovo da nema rasta.



(a) 55% oštećenja (b) TV rekonstrukcija (c) ℓ_{21} rekonstrukcija

(d) 55% oštećenja (e) TV rekonstrukcija (f) ℓ_{21} rekonstrukcija

Slika 5.3: Oštećene i rekonstruisane MRI slike



Slika 5.4: Rast vrijednosti PSNR-a u zavisnosti od porasta broja iteracija

Transformacioni domen - DWT

Kao u slučaju DCT domena, slična analiza će biti sprovedena nad MRI koristeći DWT domen. Pošto wavelet-i predstavljaju široku oblast istraživanja, u ovom radu će fokus biti stavljen na tri familije wavelet-a: Daubechies, Coiflets i Symlets. U svakoj od ove tri familije su odabrana po tri predstavnika za analizu. Predstavnici se unutar svake familije razlikuju po broju nestajućih momenata, tako da će za Daubechies biti korišćeni 'db2','db5' i 'db8', za Coiflets 'coif1', 'coif2' i 'coif3', a za Symlets 'sym1', 'sym3' i 'sym6'. U nastavku će biti dati rezultati rada ADMM pristupa koristeći navedene wavelet-e sa dvije optimizacione norme.

25 iteracija, TV minimizacija				Mozak		Koljeno	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Daubechies	db2	500x500	40	22.3847	31.2298	21.9469	28.0729
	db5	500x500		20.1025	32.1308	21.5066	28.0776
	db8	500x500		20.6851	32.1893	22.8	28.0854
	db2	1000x1000		73.0972	37.0828	99.421	31.7414
	db5	1000x1000		73.7117	37.8252	99.6908	32.2767
	db8	1000x1000		73.2687	37.9747	102.3686	32.2999
	db2	1500x1500		167.0061	39.3383	213.2973	33.8751
	db5	1500x1500		201.2268	40.1186	224.5716	34.5639
	db8	1500x1500		200.5073	40.1198	227.495	34.7341
	db2	500x500	55	22.2692	28.7561	23.4979	26.0475
	db5	500x500		22.8704	29.3449	23.7349	26.0483
	db8	500x500		21.8713	29.4352	23.9333	26.1655
	db2	1000x1000		78.5736	34.6591	105.3918	29.5265
	db5	1000x1000		78.5492	35.4457	105.1184	29.9474
	db8	1000x1000		78.4589	35.5862	106.3455	29.9832
	db2	1500x1500		213.5516	37.1418	203.5841	31.6183
	db5	1500x1500		205.6093	37.8159	205.0229	32.283
	db8	1500x1500		210.3246	37.8397	214.626	32.412
	db2	500x500	70	23.6921	25.6096	24.6023	24.3005
	db5	500x500		23.4126	26.4054	25.6124	24.3335
	db8	500x500		24.4985	26.4205	24.9486	24.3349
	db2	1000x1000		83.5475	31.6759	114.7618	27.3028
	db5	1000x1000		83.394	32.2254	114.432	27.5209
	db8	1000x1000		84.8699	32.3298	104.9781	27.5305
	db2	1500x1500		220.6352	34.1341	227.7232	29.1273
	db5	1500x1500		224.3916	34.8202	229.4873	29.5924
	db8	1500x1500		231.9548	34.8759	221.3172	29.5953
	db2	500x500	85	25.2564	21.0169	26.1079	21.0909
	db5	500x500		24.7401	21.0199	27.5144	21.2856
	db8	500x500		25.3222	21.1073	27.026	21.2954
	db2	1000x1000		87.4743	25.4752	103.1297	23.4503
	db5	1000x1000		88.817	25.9658	105.4368	23.4948
	db8	1000x1000		89.663	26.1022	105.779	23.4991
	db2	1500x1500		241.975	27.3416	248.8211	24.4235
	db5	1500x1500		237.664	27.5985	250.5884	24.5373
	db8	1500x1500		246.5987	27.5989	247.8075	24.5391

Tabela 3: MRI rekonstrukcija sa Daubechies familijom, TV minimizacija

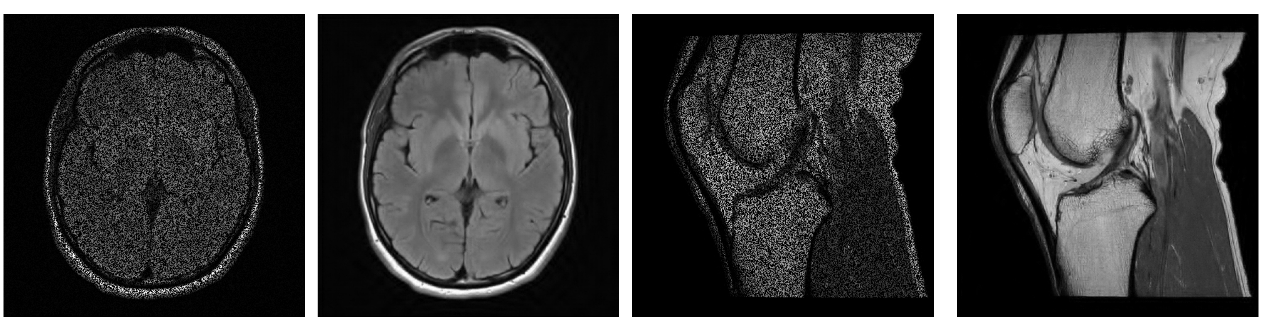
25 iteracija, TV minimizacija				Mozak		Koljeno	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Coiflets	coif1	500x500	40	22.6487	31.2858	22.1646	27.8586
	coif2	500x500		22.2132	32.0173	21.9547	28.2219
	coif3	500x500		22.5054	32.2696	21.7541	28.236
	coif1	1000x1000		88.9109	37.0785	81.0646	31.7968
	coif2	1000x1000		87.8459	37.9079	84.9576	32.2302
	coif3	1000x1000		87.6377	38.0726	85.8666	32.334
	coif1	1500x1500		199.9815	39.3728	192.9669	33.9192
	coif2	1500x1500		205.7565	40.0758	205.5463	34.55
	coif3	1500x1500		205.5536	40.1594	205.3207	34.7942
	coif1	500x500	55	23.2095	28.8077	20.7755	26.1772
	coif2	500x500		25.8559	29.4387	20.4312	26.2352
	coif3	500x500		24.9701	29.7126	20.5895	26.3353
	coif1	1000x1000		95.1024	34.732	93.6595	29.6589
	coif2	1000x1000		94.3926	35.4738	92.4911	29.9532
	coif3	1000x1000		97.7433	35.7395	87.6051	30.1378
	coif1	1500x1500		220.0982	37.1105	209.6408	31.6492
	coif2	1500x1500		218.5059	37.7501	209.7272	32.2482
	coif3	1500x1500		221.378	37.9109	210.5116	32.4812
	coif1	500x500	70	26.2402	25.7387	22.0946	24.2953
	coif2	500x500		28.7767	26.4343	22.0643	24.4714
	coif3	500x500		27.1919	26.7204	22.3289	24.538
	coif1	1000x1000		101.8877	31.7612	93.2731	27.4082
	coif2	1000x1000		102.3041	32.3738	94.561	27.5663
	coif3	1000x1000		100.8172	32.5167	97.4958	27.6289
	coif1	1500x1500		234.1268	34.1918	224.2228	29.1631
	coif2	1500x1500		232.8295	34.7929	225.1199	29.5935
	coif3	1500x1500		247.5867	34.9865	221.5395	29.7932
	coif1	500x500	85	28.9118	20.9825	23.8731	21.0358
	coif2	500x500		30.2377	21.4282	23.4412	21.3744
	coif3	500x500		27.3064	21.4649	24.3715	21.4402
	coif1	1000x1000		107.7914	25.4981	101.4734	23.4692
	coif2	1000x1000		108.8008	26.043	102.9791	23.5521
	coif3	1000x1000		112.4013	26.2477	101.773	23.6323
	coif1	1500x1500		257.9144	27.2994	240.4779	24.4783
	coif2	1500x1500		260.0123	27.6735	245.4393	24.547
	coif3	1500x1500		261.2121	27.6868	245.5352	24.5958

Tabela 4: MRI rekonstrukcija sa Coiflet familijom, TV minimizacija

25 iteracija, TV minimizacija				**Mozak**		**Koljeno**	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Symlets	sym1	500x500	40	23.2415	29.8382	20.2077	27.3185
	sym3	500x500		24.549	31.8751	19.9059	27.9538
	sym6	500x500		23.1609	32.2855	19.8267	28.1381
	sym1	1000x1000		96.1492	35.4756	72.1929	30.805
	sym3	1000x1000		87.8723	37.6612	69.3645	32.085
	sym6	1000x1000		87.2855	38.0399	69.8733	32.3828
	sym1	1500x1500		219.7054	37.702	165.2928	32.5606
	sym3	1500x1500		205.8269	39.8416	160.4568	34.2844
	sym6	1500x1500		205.8326	40.1858	160.0357	34.7306
	sym1	500x500	55	24.0101	27.4418	22.3857	25.4585
	sym3	500x500		23.4547	29.1345	20.3737	26.0898
	sym6	500x500		23.894	29.6423	21.3069	26.3619
	sym1	1000x1000		98.649	33.0216	75.6545	28.7342
	sym3	1000x1000		93.2988	35.2751	74.009	29.817
	sym6	1000x1000		94.2854	35.612	75.2678	30.0508
	sym1	1500x1500		238.3966	35.7851	213.7528	30.4776
	sym3	1500x1500		225.9488	37.5278	197.5451	31.9972
	sym6	1500x1500		221.4068	37.92	180.9722	32.4692
	sym1	500x500	70	25.729	24.2997	22.5145	23.5033
	sym3	500x500		25.4206	26.0665	22.0994	24.3438
	sym6	500x500		25.4666	26.5489	23.1475	24.5635
	sym1	1000x1000		101.3874	29.9535	80.5264	26.5437
	sym3	1000x1000		98.4999	32.1352	80.0459	27.4416
	sym6	1000x1000		100.8223	32.6052	80.2794	27.7138
	sym1	1500x1500		235.257	32.6056	216.653	28.1954
	sym3	1500x1500		229.5093	34.5272	216.6975	29.3621
	sym6	1500x1500		244.1863	34.8613	220.8604	29.6717
	sym1	500x500	85	27.7044	20.0836	24.9876	20.5178
	sym3	500x500		28.8883	21.2291	24.783	21.2583
	sym6	500x500		27.5154	21.3183	24.3802	21.4801
	sym1	1000x1000		104.4091	24.307	84.5481	22.8513
	sym3	1000x1000		105.8009	25.7627	86.5574	23.5328
	sym6	1000x1000		105.7253	26.0355	87.3365	23.6246
	sym1	1500x1500		253.6208	26.387	232.9158	24.0198
	sym3	1500x1500		254.473	27.5235	222.0971	24.4801
	sym6	1500x1500		249.9025	27.672	235.1688	24.6424

Tabela 5: MRI rekonstrukcija sa Symlet familijom, TV minimizacija

Posmatrajući tabele 3-5, možemo doći do opšteg zaključka da PSNR ima tendenciju slabog rasta sa povećanjem broja nestajućih momenata. Taj rast je minoran i dominantno je međusobna razlika oko 1 dB. Sve tri familije su dale približno iste rezultate, sa relativno zanemarljivim razlikama. U poređenju sa rezultatima kada se koristila DCT, rezultati sa wavelet-ima su dali nešto bolji PSNR (u prosjeku bolji za par decibela), dok je korišćenje wavelet-a bilo blago vremenski zahtjevnije nego korišćenje DCT domena.Kada je u pitanju jako veliko oštećenje od 85%, PSNR je stalno veći od 20 dB, dok je za najveću testiranu rezoluciju čak i blizu 30 dB, što su jako dobri rezultati, uzevši u obzir koliko je oštećenje u pitanju. Primjetno je da kod najvećeg oštećenja od 85%, rekonstruisana slika gubi detalje koje je imao original, i da je primjetno zamućenje slike.



(a) 55% oštećenja (b) Rekonstrukcija (c) 55% oštećenja (d) Rekonstrukcija

Slika 5.5: Primjeri MRI rekonstrukcije koristeći TV minimizaciju

Vizuelni prikaz rekonstrukcije je dat na slici 5.5, gdje je korišćena rezolucija 1000x1000 i 'db8' wavelet. Isto kao za prethodne tri tabele, sada će biti izloženi i diskutovani rezultati rekonstrukcije koristeći ℓ_{21}-normu na mjestu TV minimizacije.

25 iteracija, ℓ_{21}-norma				Mozak		Koljeno	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Daubechies	db2	500x500	40	8.0752	31.5747	7.5009	28.8958
	db5	500x500		6.8402	32.6477	5.8024	29.1129
	db8	500x500		7.5106	32.6516	7.5488	29.187
	db2	1000x1000		14.8896	38.5394	13.9332	33.9359
	db5	1000x1000		15.3978	40.635	14.9335	35.3705
	db8	1000x1000		15.7314	41.7835	15.1067	35.3864
	db2	1500x1500		40.1917	42.1024	37.0128	37.4883
	db5	1500x1500		39.9107	45.0076	37.86	39.1691
	db8	1500x1500		41.1661	45.039	37.8837	39.8531
	db2	500x500	55	6.3833	27.5244	7.4446	26.3952
	db5	500x500		6.5762	28.4365	6.1404	26.5955
	db8	500x500		6.0919	28.8058	6.2276	26.599
	db2	1000x1000		14.5458	33.3217	15.2614	30.1859
	db5	1000x1000		15.6858	34.7192	14.475	31.1063
	db8	1000x1000		15.1791	34.7537	15.5776	31.1278
	db2	1500x1500		40.2883	35.7816	38.4518	31.2942
	db5	1500x1500		40.5817	37.3221	38.0384	32.0478
	db8	1500x1500		41.2144	37.3556	38.2124	32.3712
	db2	500x500	70	5.7531	23.6698	5.6933	23.3895
	db5	500x500		7.1684	24.4824	5.6196	23.6821
	db8	500x500		6.9469	24.494	5.6949	23.6982
	db2	1000x1000		15.2885	26.4564	14.5129	23.7883
	db5	1000x1000		15.5839	27.4126	14.2573	24.1505
	db8	1000x1000		15.3751	27.6229	14.6695	24.1895
	db2	1500x1500		38.1003	25.989	37.2926	21.7542
	db5	1500x1500		37.0948	26.9163	36.9634	21.9032
	db8	1500x1500		37.2159	26.9185	37.7206	21.9843
	db2	500x500	85	7.4617	18.0892	6.127	16.9584
	db5	500x500		6.987	18.2775	5.9011	17.0573
	db8	500x500		6.4868	18.4112	5.9779	17.2625
	db2	1000x1000		15.4698	17.6552	15.1643	15.5564
	db5	1000x1000		15.6214	17.7644	13.896	15.5616
	db8	1000x1000		15.7487	17.7677	14.7129	15.5621
	db2	1500x1500		37.4974	16.839	39.9998	14.5216
	db5	1500x1500		36.9337	16.9454	38.5348	14.6094
	db8	1500x1500		37.207	16.9712	38.7412	14.6115

Tabela 6: MRI rekonstrukcija sa Daubechies familijom, ℓ_{21}-norma

25 iteracija, $\ell_{21} - norma$				Mozak		Koljeno	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Coiflets	coif1	500x500	40	6.347	31.3183	6.7171	28.716
	coif2	500x500		6.2376	32.456	6.9141	29.1055
	coif3	500x500		6.1949	32.527	6.7316	29.2161
	coif1	1000x1000		13.8344	38.7774	16.4308	33.9503
	coif2	1000x1000		15.4584	41.4543	15.937	35.1544
	coif3	1000x1000		14.5846	41.529	15.729	35.3918
	coif1	1500x1500		39.6651	42.3723	41.7922	37.738
	coif2	1500x1500		37.2636	44.7438	37.4756	39.4068
	coif3	1500x1500		38.4139	45.1199	38.1781	39.9669
	coif1	500x500	55	5.9033	27.5916	7.7253	26.163
	coif2	500x500		5.6233	28.5233	7.5351	26.624
	coif3	500x500		6.1256	28.5561	6.7878	26.7407
	coif1	1000x1000		14.6811	33.2233	15.7035	29.9441
	coif2	1000x1000		15.3881	34.7922	16.1706	30.6561
	coif3	1000x1000		15.0702	35.1112	16.7059	30.9714
	coif1	1500x1500		39.7886	35.7416	38.7506	31.3858
	coif2	1500x1500		39.149	36.8653	37.7816	32.4025
	coif3	1500x1500		38.0946	37.1507	37.4906	32.6249
	coif1	500x500	70	6.1591	23.6937	6.4006	23.362
	coif2	500x500		6.1674	24.1741	7.5744	23.6753
	coif3	500x500		6.2518	24.3484	6.5051	23.7971
	coif1	1000x1000		14.2572	26.7968	15.7921	23.5982
	coif2	1000x1000		15.2391	27.4663	17.8419	23.9827
	coif3	1000x1000		14.8912	27.8304	16.2431	24.0416
	coif1	1500x1500		36.937	26.0662	37.6918	21.8025
	coif2	1500x1500		38.0114	26.6869	38.1815	22.0168
	coif3	1500x1500		38.1794	26.8514	38.1779	22.0199
	coif1	500x500	85	6.3843	18.2398	7.4047	17.2491
	coif2	500x500		5.5713	18.2912	7.9778	17.3446
	coif3	500x500		6.1104	18.4731	7.0003	17.3929
	coif1	1000x1000		14.8135	17.6621	15.8914	15.5394
	coif2	1000x1000		14.8671	17.7888	15.9274	15.664
	coif3	1000x1000		14.4943	17.8263	17.1345	15.6861
	coif1	1500x1500		36.9604	16.8307	36.9201	14.56
	coif2	1500x1500		37.4302	16.9286	37.6743	14.6005
	coif3	1500x1500		37.653	16.9584	37.797	14.6165

Tabela 7: MRI rekonstrukcija sa Coiflet familijom, ℓ_{21}-norma

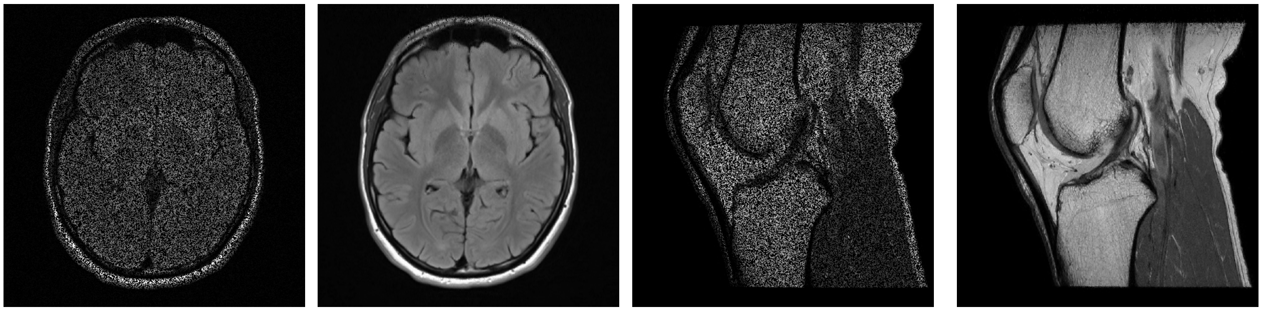
25 iteracija, ℓ_{21}-norma				Mozak		Koljeno	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Symlets	sym1	500x500	40	6.0178	28.7076	6.4966	27.5383
	sym3	500x500		6.3429	31.707	6.1238	28.9225
	sym6	500x500		5.9709	32.89	6.7925	29.2292
	sym1	1000x1000		14.7554	33.6854	15.2469	31.5425
	sym3	1000x1000		15.461	40.1877	17.5489	34.6044
	sym6	1000x1000		15.4771	42.3042	15.7904	35.4854
	sym1	1500x1500		38.9246	36.2853	38.5933	33.7898
	sym3	1500x1500		37.7051	43.8604	38.7677	38.751
	sym6	1500x1500		37.9279	45.1699	40.2772	39.7686
	sym1	500x500	55	5.6123	25.4342	6.8716	25.0899
	sym3	500x500		5.8256	27.9927	6.8453	26.4651
	sym6	500x500		7.3196	28.732	7.5833	26.7121
	sym1	1000x1000		13.8487	29.8758	14.5705	28.3414
	sym3	1000x1000		14.364	33.9095	15.0309	30.4046
	sym6	1000x1000		14.9561	34.9403	15.4373	31.0345
	sym1	1500x1500		38.3279	31.9222	38.8269	28.9363
	sym3	1500x1500		37.2606	36.2295	39.8541	31.9478
	sym6	1500x1500		37.9422	37.13	39.4225	32.4661
	sym1	500x500	70	5.9172	22.1485	6.7381	22.0674
	sym3	500x500		5.7422	24.081	7.1618	23.4757
	sym6	500x500		6.4339	24.823	6.5127	23.9059
	sym1	1000x1000		15.162	24.4453	14.4215	22.6287
	sym3	1000x1000		14.6968	27.2269	14.9587	23.6783
	sym6	1000x1000		15.0357	27.7289	15.4082	24.1121
	sym1	1500x1500		37.175	24.1747	39.193	21.0214
	sym3	1500x1500		37.0549	26.4603	40.0121	21.9007
	sym6	1500x1500		37.1424	26.9925	38.9087	22.0338
	sym1	500x500	85	5.8359	17.5272	6.2946	16.1994
	sym3	500x500		5.7064	18.1348	6.7365	17.318
	sym6	500x500		6.0608	18.362	6.8019	17.3477
	sym1	1000x1000		14.7287	17.1674	18.2056	15.2969
	sym3	1000x1000		14.352	17.755	16.2413	15.5687
	sym6	1000x1000		14.0732	17.7715	15.9152	15.6828
	sym1	1500x1500		37.4594	16.4772	39.1128	14.3753
	sym3	1500x1500		37.6981	16.9106	38.893	14.5943
	sym6	1500x1500		37.2528	16.9693	40.3615	14.6194

Tabela 8: MRI rekonstrukcija sa Symlet familijom, ℓ_{21}-norma

Ako bismo poredili tablele 6-8 sa tabelama 3-5, došli bismo do par zaključaka. Kada je u pitanju manje oštećenje slike od 40%, korišćenje ℓ_{21}-norme daje bolji kvalitet rekonstrukcije, jer je PSNR u prosjeku veći za 4-5 dB u osnosu na slučaj kada se koristi TV minimizacija, što nije slučaj za veća oštećenja od 70% i 85%. U tim slučajevima, PSNR je manji u odnosu na slučaj kada se koristila TV minimizacija, sa razlikom od skoro 10 dB. Kod velikog oštećenja, pri korišćenju ℓ_{21}-norme je primjetna značajna degradacija slike, gdje je PSNR dominantno manji od 20 dB, pa je zamućenje slike izraženije. Uočljiva je drastična razlika u vremenskim perfomansama, gdje je izvršavanje ADMM-a koristeći ℓ_{21}-normu mnogo brže u odnosu na TV minimizaciju, čak i 4-5 puta.

Analogno slikama predstavljenim slikom 5.5, isti detalji važe i za slike predstavljene slikom 5.6. Vizuelno poređenje slika na 5.5 i 5.6 dovodi do zaključka da su ivice slika bolje očuvane kada se koristi TV minimizacija.

Sveopšti zaključak bi bio da korišćenje TV minimzacije daje bolji kvalitet rekonstrukcije, po štetu vremena, jer je korišćenje ℓ_{21}-norme vremenski efikasnije.



(a) 55% oštećenja (b) Rekonstrukcija (c) 55% oštećenja (d) Rekonstrukcija

Slika 5.6: Primjeri MRI rekonstrukcije koristeći ℓ_{21}-normu

5.2 X-ray

Slike koje će biti korišćene u narednoj analizi date su na slikama 5.7 i 5.8.

Slika 5.7: X-ray pluća[6]

Slika 5.8: X-ray kuka[7]

Broj iteracija ADMM pristupa je postavljen na 25, kao i u slučaju analize MRI.

Transformacioni domen - DCT

Rezultati primjene ADMM pristupa nad oštećenim X-ray slikama, posredstvom TV minimizacije, dati su u tabeli 9.

Analogno zaključcima kod analize MRI rekonstrukcije, i ovdje je vidljivo da sa porstom rezolucije slike, raste i PSNR i vrijeme izvršavanja ADMM-a. Kvalitet rekonstrukcije je za oštećenja do 70% dominantno veći od 30 dB, ili u neposrednoj blizini te vrijednosti, što znači da je rekonstrukcija produkovala slike zadovoljavajućeg kvaliteta. Kod znatnog oštećenja od

[6]Slika preuzeta sa stranice *https://radiopaedia.org/cases/dense-hilum-sign-lung-cancer?lang=us* dana 01.02.2023. godine

[7]Slika preuzeta sa stranice *https://radiopaedia.org/articles/synovial-herniation-pit-1* dana 01.02.2023. godine

25 iteracija, TV minimizacija					
Slike	**Domen**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Pluća	DCT	500x500	40	20.7097	34.2567
		1000x1000		91.0502	37.4494
		1500x1500		219.8582	39.5207
		500x500	55	22.1895	32.4257
		1000x1000		94.6457	35.4334
		1500x1500		226.712	37.4494
		500x500	70	23.0016	30.5077
		1000x1000		98.5077	33.6537
		1500x1500		241.9482	35.3675
		500x500	85	23.072	22.8244
		1000x1000		99.8214	23.4682
		1500x1500		267.4658	23.5718
Kuk		500x500	40	18.9343	31.3991
		1000x1000		77.4072	33.9155
		1500x1500		181.2924	35.2719
		500x500	55	18.7999	29.9615
		1000x1000		79.0358	32.3432
		1500x1500		190.141	33.4948
		500x500	70	20.3423	28.4022
		1000x1000		80.5192	30.6457
		1500x1500		189.6434	31.7085
		500x500	85	18.6354	23.5278
		1000x1000		82.6023	24.3413
		1500x1500		190.9827	24.8979

Tabela 9: Rezultati X-ray rekonstrukcije, sa korišćenim DCT domenom i TV minimizacijom

85%, primjetan je drastičan pad kvaliteta rekonstrukcije, reda do 10 dB. Kod ovih rekonstruisanih slika je primjetno zamagljenje i gubitak detalja. U prosjeku je vrijeme izvršavanja nešto duže u odnosu na vrijeme izvršavanja ADMM-a kod MRI rekonstrukcije.

U tabeli 10 su prezentovani rezultati testiranja ADMM pristupa nad oštećenim X-ray slikama koristeći ℓ_{21}-normu, umjesto TV minimizacije.

25 iteracija, ℓ_{21}-norma					
Slike	**Domen**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Pluća	DCT	500x500	40	3.6665	43.4748
		1000x1000		10.3892	47.8988
		1500x1500		29.5278	47.913
		500x500	55	4.9613	39.4549
		1000x1000		10.1556	39.6407
		1500x1500		30.7132	40.1419
		500x500	70	4.698	28.8873
		1000x1000		10.9074	17.9361
		1500x1500		30.1975	14.6371
		500x500	85	3.5042	13.2129
		1000x1000		11.8906	10.5572
		1500x1500		30.5708	9.4455
Kuk		500x500	40	4.3906	32.7393
		1000x1000		9.9869	38.7268
		1500x1500		28.8359	43.797
		500x500	55	3.888	30.7456
		1000x1000		10.6936	35.956
		1500x1500		29.905	37.5386
		500x500	70	3.9046	29.0405
		1000x1000		10.485	28.0659
		1500x1500		30.3262	22.4011
		500x500	85	3.3784	19.3874
		1000x1000		11.7641	15.5066
		1500x1500		29.6524	13.7528

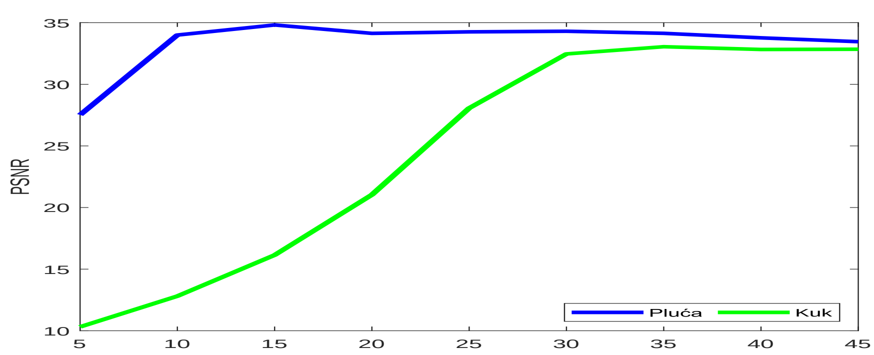
Tabela 10: Rezultati X-ray rekonstrukcije, sa korišćenim DCT domenom i ℓ_{21}-normom

Kao i u slučaju rekonstrukcije MRI, vrijeme izvršavanja ADMM-a koristeći ℓ_{21}-normu je neuporedivo kraće u odnosu na vrijeme izvršavanja koristeći TV minimizaciju. Bitna razlika u odnosu na rezultate iz tabele 9 jeste vrijednost PSNR-a za oštećenja od 70% i 85%. U tabeli 10 PSNR za pomenuta oštećenja ima konstantan trend pada, dok je u tableli 9 ima trend rasta. Sami rezultati, koji imaju trend pada, su loši i rekonstruisane slike nijesu zadovoljavajućeg kvaliteta. Vizuelni primjeri rekonstrukcije, gdje je korišćena 1000x1000 rezolucija, su dati na slici 5.9. Na slici 5.10 je za sliku pluća korišćena 500x500 rezolucija sa TV minimizacijom i oštećenjem od 40%, dok je za sliku kuka korišćena 1000x1000 rezolucija, sa ℓ_{21}-normom i oštećenjem od 70%. Zasićenje se postiže između 25 i 30 iteracija, što je istovjetno sa zaključkom kod MRI rekonstrukcije.

(a) 55% oštećenja (b) TV rekonstrukcija (c) ℓ_{21} rekonstrukcija

(d) 55% oštećenja (e) TV rekonstrukcija (f) ℓ_{21} rekonstrukcija

Slika 5.9: Oštećene i rekonstruisane X-ray slike



Slika 5.10: Rast vrijednosti PSNR-a u zavisnosti od porasta broja iteracija

Transformacioni domen - DWT

Ista analiza koja je bila sprovedena u slučaju DWT domena kod MRI rekonstrukcije, biće sprovedena i kod X-ray rekonstrukcije. Biće testirane iste familije i tipovi wavelet-a nad oštećenim slikama promjenljive rezolucije i stepena oštećenja, sa dva optimizaciona algoritma.

U tabelama 11, 12 i 13 su dati rezultati rekonstrukcije koristeći TV minimizaciju. Kod Daubechies i Coiflet familije, primjetan je konstantan, ali minoran rast PSNR-a u vrijednosti koja je većinom manja od 1 dB. Sami rezultati su za oštećenja manja od 85% dominantno veći od 30 dB, što su jako dobri rezultati. Kod Symlet familije je malo drugačije ponašanje, jer za oštećenja od 40% i 55% ima isti trend rasta kao i Daubechies i Coiflet, ali kod oštećenja od 70% i 85% ima konstantan trend pada vrijednosti PSNR-a, bez obzira na rezoluciju.

25 iteracija, TV minimizacija				Pluća		Kuk	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Daubechies	db2	500x500	40	25.9055	35.6619	24.8578	31.2289
	db5	500x500		24.9425	36.0431	25.6188	31.3343
	db8	500x500		24.6163	36.0697	27.8729	31.4338
	db2	1000x1000		92.6252	38.2731	92.4331	33.7061
	db5	1000x1000		93.7353	38.4412	94.9049	34.0175
	db8	1000x1000		90.5919	38.5971	95.1694	34.0186
	db2	1500x1500		215.8487	39.8119	214.8361	34.9775
	db5	1500x1500		216.5078	39.9165	212.8934	35.1063
	db8	1500x1500		212.7719	39.9481	186.3548	35.117
	db2	500x500	55	26.4195	32.9734	26.1598	29.3333
	db5	500x500		26.498	33.8894	27.9142	29.7233
	db8	500x500		26.7537	33.8911	25.7819	29.7935
	db2	1000x1000		95.8306	35.6227	98.6412	32.0379
	db5	1000x1000		100.059	36.0756	100.82	32.3489
	db8	1000x1000		98.2091	36.1597	100.2753	32.3529
	db2	1500x1500		229.8333	37.5096	228.9706	33.2839
	db5	1500x1500		233.3164	37.5121	232.8939	33.3533
	db8	1500x1500		237.3434	37.5165	231.5596	33.3721
	db2	500x500	70	28.3987	29.4913	27.7916	27.2464
	db5	500x500		28.1135	30.4551	27.6079	27.7163
	db8	500x500		28.016	30.8708	28.0854	27.8077
	db2	1000x1000		100.6963	31.5815	103.5272	29.5012
	db5	1000x1000		105.3868	33.2968	106.4965	30.3722
	db8	1000x1000		105.2681	33.5024	106.2557	30.4711
	db2	1500x1500		257.5619	33.7565	238.6726	31.0151
	db5	1500x1500		261.8716	34.1191	238.8739	31.4719
	db8	1500x1500		259.0448	34.5607	230.4461	31.4914
	db2	500x500	85	29.2314	21.5426	27.5857	22.4153
	db5	500x500		29.0705	22.7767	29.3347	23.0428
	db8	500x500		29.8078	22.7864	26.3453	23.0487
	db2	1000x1000		106.2222	22.0139	109.7219	23.7374
	db5	1000x1000		109.9529	23.5469	111.8896	24.5464
	db8	1000x1000		106.7043	23.5911	111.2251	24.5556
	db2	1500x1500		267.6487	22.85	239.3089	24.4613
	db5	1500x1500		268.9978	23.4464	244.7449	24.759
	db8	1500x1500		265.9354	23.4802	244.7943	24.88

Tabela 11: X-ray rekonstrukcija sa Dubechies familijom, TV minimizacija

25 iteracija, TV minimizacija				Pluća		Kuk	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Coiflets	coif1	500x500	40	24.4144	35.9891	25.161	31.3449
	coif2	500x500		26.8173	36.2004	29.4731	31.4795
	coif3	500x500		24.4991	36.2169	25.2986	31.5296
	coif1	1000x1000		91.7897	38.5307	96.0214	33.9252
	coif2	1000x1000		94.2324	38.6242	96.5633	34.0239
	coif3	1000x1000		93.3271	38.6266	96.565	34.0313
	coif1	1500x1500		228.4472	39.9605	223.8683	35.0703
	coif2	1500x1500		230.1793	40.1009	213.4922	35.1263
	coif3	1500x1500		229.9234	40.1104	212.1724	35.1494
	coif1	500x500	55	26.1633	33.733	26.1958	29.5415
	coif2	500x500		25.4957	33.899	25.9354	29.758
	coif3	500x500		25.494	33.9051	28.7555	29.889
	coif1	1000x1000		85.8562	36.2618	101.6047	32.2395
	coif2	1000x1000		86.6009	36.3282	103.9366	32.2995
	coif3	1000x1000		87.2037	36.3316	104.2214	32.3264
	coif1	1500x1500		241.4127	37.7522	235.5926	33.3131
	coif2	1500x1500		236.2254	37.895	239.4703	33.3759
	coif3	1500x1500		237.2353	37.9012	241.2062	33.3776
	coif1	500x500	70	26.0819	30.6185	27.5397	27.5851
	coif2	500x500		25.8634	31.0596	27.8843	27.7172
	coif3	500x500		27.9524	31.1434	29.4211	27.7449
	coif1	1000x1000		88.9518	33.0522	108.8965	30.2819
	coif2	1000x1000		89.2114	33.0618	108.3669	30.2948
	coif3	1000x1000		89.7219	33.0764	107.8773	30.3003
	coif1	1500x1500		246.4602	34.605	246.462	31.3675
	coif2	1500x1500		245.9402	34.6153	245.7999	31.3746
	coif3	1500x1500		246.7322	34.6463	250.2638	31.3946
	coif1	500x500	85	27.547	22.2919	29.4316	22.6117
	coif2	500x500		27.969	22.371	30.0357	22.9968
	coif3	500x500		27.6081	22.3987	28.9612	23.0029
	coif1	1000x1000		105.491	23.046	113.1342	24.1534
	coif2	1000x1000		105.5777	23.0526	114.7355	24.2138
	coif3	1000x1000		108.768	23.06	114.9026	24.3545
	coif1	1500x1500		257.7744	23.2941	265.7783	24.7884
	coif2	1500x1500		264.441	23.3089	264.6809	24.8127
	coif3	1500x1500		262.8711	23.3101	261.17	24.8219

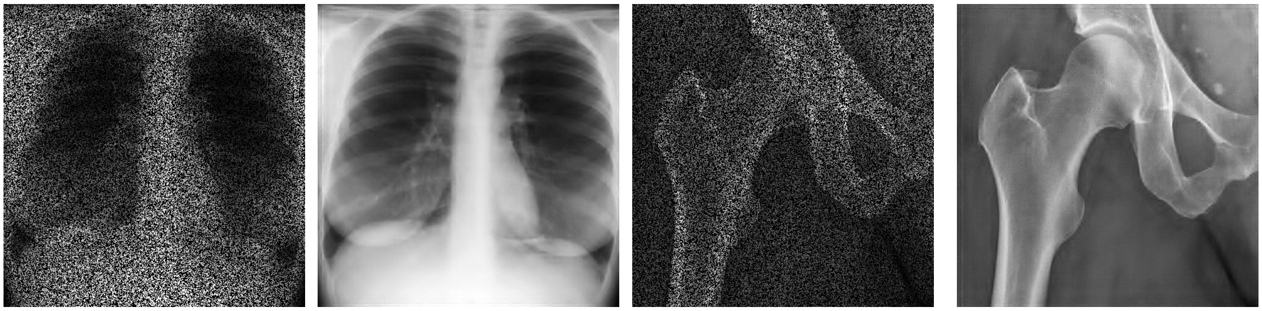
Tabela 12: X-ray rekonstrukcija sa Coiflet familijom, TV minimizacija

25 iteracija, TV minimizacija				Pluća		Kuk	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Symlets	sym1	500x500	40	25.2531	35.6093	24.3681	31.157
	sym3	500x500		22.3453	36.14	24.7326	31.4118
	sym6	500x500		23.7336	36.2052	24.4567	31.4379
	sym1	1000x1000		101.239	38.3557	94.2911	33.8643
	sym3	1000x1000		92.3196	38.6642	91.9265	33.9273
	sym6	1000x1000		90.8472	38.7092	90.4313	33.9302
	sym1	1500x1500		250.3017	39.7967	225.4131	34.9034
	sym3	1500x1500		234.2068	40.0761	215.3498	35.0859
	sym6	1500x1500		229.6248	40.0839	212.1757	35.0894
	sym1	500x500	55	25.6659	33.8165	25.4052	29.5446
	sym3	500x500		24.6085	34.0537	25.4587	29.7457
	sym6	500x500		24.5896	34.16	25.032	29.7577
	sym1	1000x1000		104.4563	36.5692	101.9947	32.272
	sym3	1000x1000		97.8954	36.6433	97.8844	32.2757
	sym6	1000x1000		97.3065	36.7553	97.5379	32.2828
	sym1	1500x1500		268.1507	38.026	236.8881	33.3155
	sym3	1500x1500		250.5639	38.1095	232.0808	33.3239
	sym6	1500x1500		245.2805	38.1776	227.3537	33.3291
	sym1	500x500	70	26.466	31.5188	26.7524	27.7059
	sym3	500x500		26.9678	30.4388	26.6034	27.6601
	sym6	500x500		26.8601	30.2176	27.2612	27.5694
	sym1	1000x1000		117.103	34.3819	104.9668	30.5015
	sym3	1000x1000		108.4525	32.9477	103.8975	30.2347
	sym6	1000x1000		104.7958	32.1177	103.461	29.8453
	sym1	1500x1500		272.4397	35.7624	249.2218	31.6537
	sym3	1500x1500		261.9062	34.7467	241.3578	31.4159
	sym6	1500x1500		260.9772	34.1558	241.1193	31.2433
	sym1	500x500	85	27.1967	23.6586	28.7417	23.1501
	sym3	500x500		28.1294	22.5455	27.8042	23.0947
	sym6	500x500		27.3985	21.6808	28.2804	22.674
	sym1	1000x1000		114.3682	23.8926	111.2435	24.5934
	sym3	1000x1000		110.5012	23.1087	109.1209	24.2287
	sym6	1000x1000		112.1381	22.5039	108.9985	24.04
	sym1	1500x1500		273.0672	24.0448	241.5682	25.0596
	sym3	1500x1500		263.9671	23.383	252.0246	24.7949
	sym6	1500x1500		266.2742	22.8396	252.3915	24.543

Tabela 13: X-ray rekonstrukcija sa Symlet familijom, TV minimizacija

Primjeri rekonstrukcije su dati slikom 5.11, gdje je korišćena 1000x1000 rezolucija sa ’coif3’ wavelet-om.

Prethodna analiza je ponovljena koristeći ℓ_{21}-normu i rezultati te analize su dati u narednim tabelama (14-16).



(a) 55% oštećenja (b) Rekonstrukcija (c) 55% oštećenja (d) Rekonstrukcija

Slika 5.11: Primjeri X-ray rekonstrukcije koristeći TV minimizaciju

25 iteracija, ℓ_{21}-norma				**Pluća**		**Kuk**	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Daubechies	db2	500x500	40	7.8419	27.3154	6.8861	26.4959
	db5	500x500		7.338	29.8929	6.9196	28.7636
	db8	500x500		6.9845	27.1828	6.4369	27.5097
	db2	1000x1000		16.4928	27.2526	15.5626	28.7356
	db5	1000x1000		14.6224	29.2962	15.2377	31.1142
	db8	1000x1000		15.3531	27.8904	15.6735	30.0389
	db2	1500x1500		40.4781	26.7832	38.9453	29.6856
	db5	1500x1500		38.4223	27.4791	40.0902	31.328
	db8	1500x1500		40.3392	26.5149	39.4301	30.7004
	db2	500x500	55	6.9661	23.0943	6.134	23.6441
	db5	500x500		6.2346	24.2834	8.2828	25.4524
	db8	500x500		6.5119	22.3817	6.9626	24.1582
	db2	1000x1000		15.4583	20.8646	15.7175	24.7788
	db5	1000x1000		15.2321	20.8802	15.457	26.287
	db8	1000x1000		16.2966	20.7057	15.4715	24.9609
	db2	1500x1500		37.6571	18.0278	39.0613	24.3041
	db5	1500x1500		40.2197	18.2593	39.7821	25.1252
	db8	1500x1500		39.0984	18.0273	41.306	24.5617
	db2	500x500	70	6.4246	16.9945	6.762	21.1079
	db5	500x500		6.1436	17.192	6.712	21.3785
	db8	500x500		6.6584	16.9755	6.3206	20.8308
	db2	1000x1000		14.1492	13.8934	16.4958	19.5642
	db5	1000x1000		14.8253	13.9017	16.7328	19.8979
	db8	1000x1000		14.7576	13.7791	17.8016	19.499
	db2	1500x1500		37.767	12.1664	38.1813	17.4188
	db5	1500x1500		38.7103	12.2109	38.5638	17.6178
	db8	1500x1500		38.3575	12.1478	39.0609	17.4584
	db2	500x500	85	6.251	10.3025	6.7482	14.8787
	db5	500x500		6.1591	10.249	6.1449	14.8808
	db8	500x500		6.8623	10.2368	7.2259	14.6202
	db2	1000x1000		15.8725	8.787	14.9171	12.7447
	db5	1000x1000		14.683	8.7663	15.8536	12.7708
	db8	1000x1000		15.1491	8.7654	17.2927	12.6408
	db2	1500x1500		38.1957	8.094	38.1148	11.7175
	db5	1500x1500		38.2154	8.0906	38.5001	11.7265
	db8	1500x1500		39.0704	8.0616	38.5087	11.6901

Tabela 14: X-ray rekonstrukcija sa Daubechies familijom, ℓ_{21}-norma

Daubechies familija je imala najbolje rezultate PSNR-a kod 'db5' wavelet-a, iako su svi rezultati kod 'db2'-'db8' za istu rezoluciju imali razliku na drugoj decimali. Coiflet familija je imala stalan trend rasta PSNR-a,mada je i kod nje ta razlika dominantno vidljiva tek na drugoj decimali. Za obje familije je karakteristična i činjenica da PSNR opada sa porastom rezolucije.

Ponašanje Symlet familije se drastičnio razlikuje u odnosu na ostale dvije, jer bilježi konstantan pad za svaki wavelet, bez obzira na rezoluciju, tako da je u ovoj varijanti dala najgore rezultate u poređenju sa Daubechies i Coiflet familijama.

Poređenje sa tabelama 11-13 kada je korišćena TV minimizacija iziskuje zaključak da su rezultati mnogo bolji nego kada je korišćena ℓ_{21}-norma, dominantno su imali trend rasta,

25 iteracija, ℓ_{21}-norma				Pluća		Kuk	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Coiflets	coif1	500x500	40	6.7668	27.7768	6.3185	26.3677
	coif2	500x500		7.4131	28.3585	6.4743	26.5979
	coif3	500x500		6.367	28.4453	5.9384	26.5988
	coif1	1000x1000		16.6981	27.7847	13.2254	28.5041
	coif2	1000x1000		15.9578	28.1131	13.2653	28.7077
	coif3	1000x1000		15.5505	28.1598	13.3473	29.0849
	coif1	1500x1500		38.7857	26.7735	33.8388	29.2896
	coif2	1500x1500		39.3109	26.7825	34.4516	29.6867
	coif3	1500x1500		38.8373	26.8305	34.352	29.7452
	coif1	500x500	55	7.004	23.1236	5.8187	23.2473
	coif2	500x500		6.8195	23.4109	5.6874	23.5575
	coif3	500x500		6.5315	23.4533	6.5324	23.7409
	coif1	1000x1000		16.2359	20.9061	14.1444	24.3463
	coif2	1000x1000		16.4348	21.1838	14.2897	24.6027
	coif3	1000x1000		15.328	21.198	14.5981	24.6297
	coif1	1500x1500		38.5691	18.022	33.63	24.0089
	coif2	1500x1500		40.5574	18.0781	34.3258	24.184
	coif3	1500x1500		39.6483	18.0932	33.0277	24.3019
	coif1	500x500	70	6.8428	17.0492	5.9645	20.384
	coif2	500x500		6.2624	17.2499	6.2172	20.4051
	coif3	500x500		6.8211	17.2692	5.8396	20.733
	coif1	1000x1000		16.9413	13.8998	13.9662	19.3714
	coif2	1000x1000		16.2406	13.9541	13.8768	19.4806
	coif3	1000x1000		15.8276	13.9683	13.5611	19.5051
	coif1	1500x1500		39.3933	12.137	33.3453	17.3493
	coif2	1500x1500		40.4966	12.1976	34.9202	17.3888
	coif3	1500x1500		39.8331	12.2172	34.495	17.3898
	coif1	500x500	85	6.4144	10.3098	5.9446	14.6608
	coif2	500x500		6.4109	10.3821	5.6066	14.7442
	coif3	500x500		6.2523	10.3915	5.7327	14.7504
	coif1	1000x1000		15.6324	8.7913	13.7741	12.6957
	coif2	1000x1000		15.4058	8.826	14.0709	12.7032
	coif3	1000x1000		15.9803	8.8361	13.5499	12.7086
	coif1	1500x1500		40.2966	8.0786	33.7223	11.679
	coif2	1500x1500		39.1775	8.0822	33.0059	11.6862
	coif3	1500x1500		39.7691	8.0873	34.794	11.7008

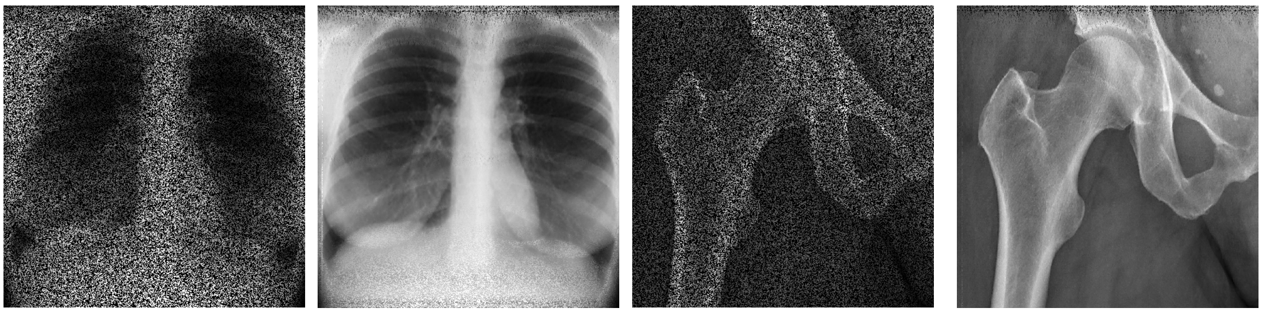
Tabela 15: X-ray rekonstrukcija sa Coiflet familijom, ℓ_{21}-norma

25 iteracija, ℓ_{21}-norma				Pluća		Kuk	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Symlets	sym1	500x500	40	5.7514	31.5043	6.5604	29.9884
	sym3	500x500		5.7873	28.411	6.0704	26.3228
	sym6	500x500		7.2291	27.7967	6.9996	26.2893
	sym1	1000x1000		14.4943	31.9848	12.7617	33.2414
	sym3	1000x1000		14.7908	27.9842	15.3576	28.6008
	sym6	1000x1000		15.1333	27.9108	14.4232	28.4469
	sym1	1500x1500		40.6773	28.4127	35.7571	32.8895
	sym3	1500x1500		39.7626	26.847	36.3168	29.5427
	sym6	1500x1500		39.9054	26.7533	36.9453	29.4669
	sym1	500x500	55	5.5706	25.0942	7.5734	26.3878
	sym3	500x500		6.8466	23.4515	5.6722	23.3082
	sym6	500x500		7.5377	22.991	6.6109	23.2149
	sym1	1000x1000		14.2309	21.4684	13.4047	27.1686
	sym3	1000x1000		15.4277	21.045	14.4851	24.6636
	sym6	1000x1000		14.1029	20.9768	14.1024	24.4799
	sym1	1500x1500		39.7639	18.1966	36.8921	25.3754
	sym3	1500x1500		40.2178	18.0216	36.0826	24.1631
	sym6	1500x1500		40.4719	18.0138	36.9848	24.1134
	sym1	500x500	70	6.8969	17.1543	6.0181	22.3428
	sym3	500x500		5.8316	17.1395	5.6148	20.7136
	sym6	500x500		5.7173	17.1127	6.4395	20.5847
	sym1	1000x1000		14.9988	13.8627	14.3526	19.9247
	sym3	1000x1000		15.1473	13.8466	14.6586	19.4398
	sym6	1000x1000		16.1412	13.8306	16.3398	19.3885
	sym1	1500x1500		39.4034	12.1582	36.9331	17.5182
	sym3	1500x1500		40.0743	12.1349	37.4765	17.3769
	sym6	1500x1500		39.7627	12.1295	37.7811	17.3702
	sym1	500x500	85	6.1048	10.26	5.7806	14.84
	sym3	500x500		6.6352	10.2102	7.0965	14.7252
	sym6	500x500		6.2103	10.1945	5.6751	14.7188
	sym1	1000x1000		14.4922	8.7339	14.5999	12.6847
	sym3	1000x1000		14.2843	8.6916	14.5371	12.678
	sym6	1000x1000		15.3565	8.6665	14.5221	12.6261
	sym1	1500x1500		37.1181	8.0646	36.5549	11.7094
	sym3	1500x1500		38.7562	8.0411	36.8691	11.6891
	sym6	1500x1500		41.2653	8.0339	38.1481	11.6525

Tabela 16: X-ray rekonstrukcija sa Symlet familijom, ℓ_{21}-norma

a i razlika u kvalitetu rekonstrukcije je i do 10 dB u korist korišćenja TV minimizacije. Takođe, isto kao i zaključak kod MRI rekonstrukcije, vremensko izvršavanje sa ℓ_{21}-normom je neuporedivo kraće u odnosu na slučaj kada je korišćena TV minimizacija, o čemu svjedoče rezultati u tabelama.

Isto kao i u slučaju DCT domena, primjeri rekonstrukcije su dati slikom 5.12. Parametri rezolucije i wavelet-a su ostali isti kao i za sliku 5.11. Vizuelno poređenje ukazuje na superiornost korišćenja TV minimizacije u ADMM pristupu pri rekonstrukciji X-ray slika, jer je u mogućnosti da sačuva detalje i ivice slike.



(a) 55% oštećenja (b) Rekonstrukcija (c) 55% oštećenja (d) Rekonstrukcija

Slika 5.12: Primjeri X-ray rekonstrukcije koristeći ℓ_{21}-normu

5.3 CT

U svrhe testiranja i analiziranja performansi ADMM pritupa kod rekonstrukcije CT slika, biće korišćene slike 5.13 i 5.14.

Slika 5.13: CT pelvisa[8]

Slika 5.14: CT kičme[9]

Kao i u prethodna dva slučaja analize rezultata MRI i X-ray rekonstrukcije, i kod CT analize je broj iteracija ADMM pristupa postavljen na 25.

[8]Slika preuzeta sa stranice *https : //wikimsk.org/wiki/Hip_Osteoarthritis* dana 01.02.2023. godine

[9]Slika preuzeta sa stranice *https://www.cedars-sinai.org/programs/imaging-center/exams/ct-scans/lumbar-spine.html* dana 01.02.2023. godine

Transformacioni domen - DCT

U tabeli 17 su dati rezultati rada ADMM pritupa, koristivši DCT transformacioni domen i TV minimizaciju, dok su u tabeli 18 rezultati sa ℓ_{21}-normom.

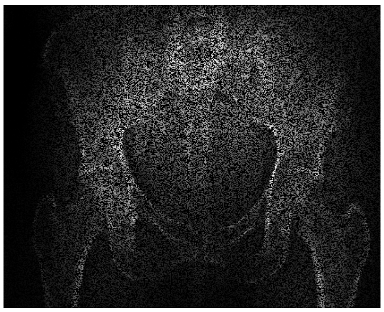
25 iteracija, TV minimizacija					
Slike	**Domen**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Pelvis	DCT	500x500	40	15.6979	32.4357
		1000x1000		52.036	35.3323
		1500x1500		136.2752	37.1528
		500x500	55	16.0499	30.7673
		1000x1000		52.8329	33.3619
		1500x1500		136.3281	35.1215
		500x500	70	14.879	28.745
		1000x1000		52.6904	31.1856
		1500x1500		137.4314	32.7812
		500x500	85	15.801	24.1623
		1000x1000		56.0229	25.6257
		1500x1500		124.9831	26.3267
Kičma		500x500	40	17.7865	29.9193
		1000x1000		74.5205	34.4347
		1500x1500		177.6242	36.9567
		500x500	55	19.902	27.6777
		1000x1000		76.6312	32.6529
		1500x1500		179.7924	35.1782
		500x500	70	20.9004	26.5891
		1000x1000		79.6396	30.5768
		1500x1500		190.7463	33.3358
		500x500	85	22.7681	23.6827
		1000x1000		87.1842	25.5931
		1500x1500		204.5476	26.7013

Tabela 17: Rezultati CT rekonstrukcije, sa korišćenim DCT domenom i TV minimizacijom

25 iteracija, ℓ_{21}-norma					
Slike	**Domen**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Pelvis	DCT	500x500	40	3.2323	37.8584
		1000x1000		10.8172	45.5927
		1500x1500		29.8656	49.6505
		500x500	55	3.1397	34.8972
		1000x1000		10.4259	40.8936
		1500x1500		29.7054	44.8991
		500x500	70	3.357	31.9374
		1000x1000		10.5632	35.1733
		1500x1500		30.4034	35.2806
		500x500	85	4.0067	24.9722
		1000x1000		10.2334	20.8644
		1500x1500		30.1328	18.4274
Kičma		500x500	40	3.7768	37.868
		1000x1000		11.5184	46.2981
		1500x1500		32.9324	49.9888
		500x500	55	3.9095	33.7485
		1000x1000		10.9299	40.8802
		1500x1500		33.1268	44.914
		500x500	70	3.455	30.4241
		1000x1000		11.0493	34.8637
		1500x1500		33.1626	34.8954
		500x500	85	3.5101	25.7774
		1000x1000		10.9937	22.7539
		1500x1500		33.5424	19.9538

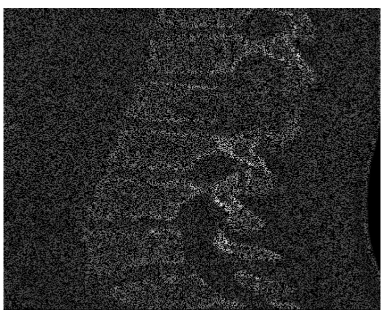
Tabela 18: Rezultati X-ray rekonstrukcije, sa korišćenim DCT domenom i ℓ_{21}-normom

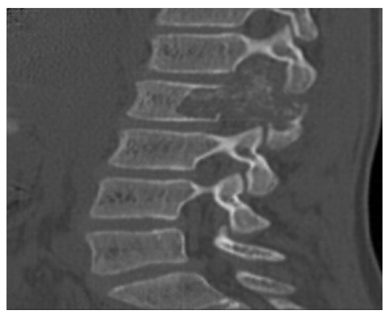
Kao što je iz tabele 17 vidljivo, PSNR ima stalan trend rasta sa povećanjem rezolucije slike, i kao u slučajevima sa prethodnim tipovima slika, dominantno je veći ili blizu 30 dB, što je zadovoljavajući kvalitet rekonstrukcije. Vremensko izvršavanje ADMM-a je približno isto kao i u slučaju kod DCT domena kod MRI rekonstrukcije. U tabeli 18, PSNR raste sa porastom rezolucije za oštećenja manja od 85%, dok za oštećenje od 85% opada sa porastom rezolucije. Za niža oštećenja, ℓ_{21}-norma da je bolji kvalitet rekonstrukcije, dok za viša oštećenja slike TV minimizacija daje superiorniji kvalitet. Kao i u prethodnim slučajevima sa MRI i X-ray rekonstrukcijom, brzina izvršavanja sa ℓ_{21}-normom je drastično brža u odnosu na izvršavanje sa TV minimizacijom.

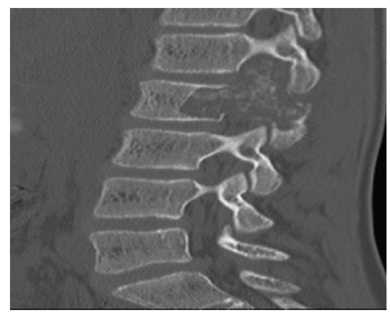

(a) 55% oštećenja


(b) TV rekonstrukcija

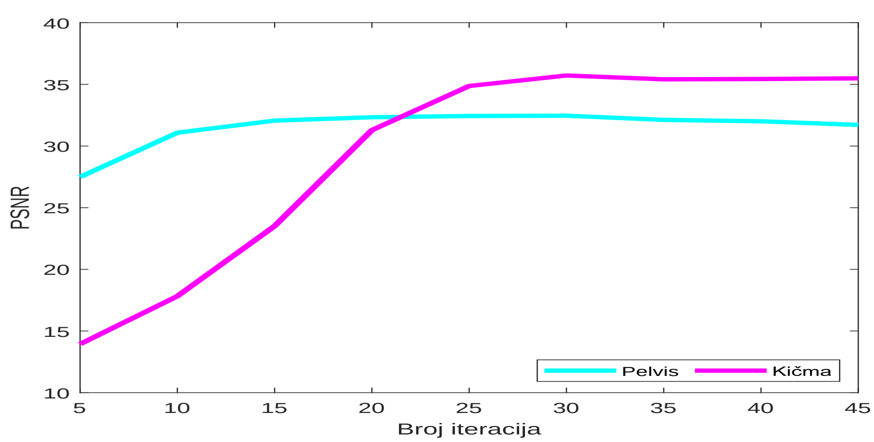

(c) ℓ_{21} rekonstrukcija


(d) 55% oštećenja


(e) TV rekonstrukcija


(f) ℓ_{21} rekonstrukcija

Slika 5.15: Oštećene i rekonstruisane CT slike



Slika 5.16: Rast vrijednosti PSNR-a u zavisnosti od porasta broja iteracija

Primjer rekonstrukcije je dat na slici 5.15. gdje su, kao i u prethodnim primjerima, korišćene slike sa 1000x1000 rezolucijom. Kao i u analizi sprovedenoj kod MRI i X-ray rekonstrukcije, i kod CT rekonstrukcije je na slici 5.16 prezenotvana promjena PSNR-a u zavisnosti od broja iteracija. Za sliku pelvisa je korišćena 500x500 rezolucija sa TV minimizacijom i oštećenjem od 40%, dok je za sliku kičme korišćena 1000x1000 rezolucija, sa ℓ_{21}-normom i oštećenjem od 70%. Zaključak je isti u sva tri slučaja. Nakon 25 iteracije, PSNR ulazi u zasićenje kada je promjena jako mala i gotovo neprimjetna.

Transformacioni domen - DWT

Analogno kao i sa prethodna dva tipa slika, u naredne tri tabele (19-21) su dati rezultati CT rekonstrukcije, koristeći DWT domen i TV minimizaciju. Daubechies familija daje konstantan rast PSNR-a sa porastom rezolucije, s time što je jako mala razlika između 'db2' i 'db8' wavelet-a, dok je 'db5' davao najveći PSNR od sva tri, iako je ta razlika decimalna i dominantno manja od 1 dB. Coiflet familija takođe daje stalan rast PSNR-a sa porastom rezolucije i PSNR je za svaki naredni coiflet malo veći nego za prethodni. Ta razlika je jako mala, većinom na drugoj decimali. Kod Symlet familije je zaključak isti kao za Coiflet familiju.

Sve tri familije su dale približno iste rezultate kvaliteta rekonstrukcije, i vremensko izvršavanje se ne razlikuje u odnosu na istu analizu kod MRI i X-ray rekonstrukcije.

25 iteracija, TV minimizacija				Pelvis		Kičma	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Daubechies	db2	500x500	40	24.1781	33.1101	26.494	34.6942
	db5	500x500		26.5145	33.3537	25.324	35.0776
	db8	500x500		26.5646	33.2747	24.9763	34.6677
	db2	1000x1000		101.4865	35.9643	102.8784	37.8558
	db5	1000x1000		100.2013	36.4598	103.4125	38.2126
	db8	1000x1000		102.1578	36.4375	101.1521	38.1132
	db2	1500x1500		228.2922	37.684	228.4642	39.4284
	db5	1500x1500		227.5877	38.0321	234.8785	39.924
	db8	1500x1500		230.3982	38.025	235.2162	39.9057
	db2	500x500	55	26.9659	30.9299	27.557	32.3336
	db5	500x500		27.0402	31.2984	27.4105	32.8717
	db8	500x500		27.4852	31.0961	26.7444	32.2682
	db2	1000x1000		116.5468	33.9792	109.7055	35.7642
	db5	1000x1000		106.8573	34.4641	110.3942	36.0191
	db8	1000x1000		105.0887	34.425	110.3089	35.9392
	db2	1500x1500		230.9255	35.7435	258.3378	37.3292
	db5	1500x1500		232.764	36.0589	242.3084	37.8225
	db8	1500x1500		235.0123	36.0427	244.1908	37.8035
	db2	500x500	70	29.1151	28.6901	28.3077	29.7053
	db5	500x500		29.626	29.0267	29.3624	30.1981
	db8	500x500		28.5058	28.7805	27.7214	29.4363
	db2	1000x1000		111.1396	31.6156	117.8493	33.1635
	db5	1000x1000		115.3878	31.9901	115.6104	33.3507
	db8	1000x1000		116.4514	31.9189	118.2167	33.193
	db2	1500x1500		247.4045	33.4021	281.2731	34.8689
	db5	1500x1500		244.1576	33.6753	259.1793	35.1193
	db8	1500x1500		302.2471	33.6698	267.659	35.0885
	db2	500x500	85	30.6268	24.2148	31.6906	24.7352
	db5	500x500		31.615	24.3961	31.0705	24.8506
	db8	500x500		31.7463	24.2123	30.4588	24.4116
	db2	1000x1000		114.4887	25.9378	125.8113	26.7294
	db5	1000x1000		115.559	26.1334	122.7404	26.7689
	db8	1000x1000		115.2527	25.945	117.5125	26.6516
	db2	1500x1500		261.066	26.7517	274.0957	27.4829
	db5	1500x1500		259.4388	26.8736	283.2931	27.5657
	db8	1500x1500		261.3175	26.8035	282.9628	27.4599

Tabela 19: CT rekonstrukcija sa Daubechies familijom, TV minimizacija

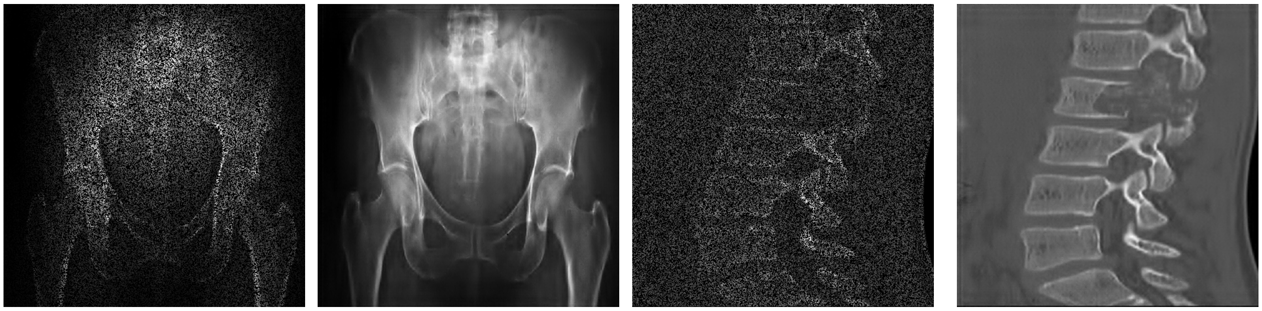
25 iteracija, TV minimizacija				Pelvis		Kičma	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Coiflets	coif1	500x500	40	23.336	33.1256	26.12	34.5181
	coif2	500x500		24.4868	33.4817	26.6556	35.0545
	coif3	500x500		25.2319	33.5317	26.4827	35.0637
	coif1	1000x1000		93.3075	36.1135	96.3168	37.843
	coif2	1000x1000		99.7851	36.5031	96.3517	38.2797
	coif3	1000x1000		99.9432	36.5151	97.5736	38.38
	coif1	1500x1500		217.375	37.7468	223.7557	39.4272
	coif2	1500x1500		218.0289	38.0702	226.0236	40.0373
	coif3	1500x1500		217.9555	38.0982	226.0932	40.1735
	coif1	500x500	55	27.9496	31.0348	28.4115	32.0699
	coif2	500x500		27.6654	31.361	27.8407	32.6901
	coif3	500x500		28.0494	31.4113	27.1845	32.7368
	coif1	1000x1000		104.4249	34.0722	106.1599	35.7426
	coif2	1000x1000		104.8812	34.4146	107.3564	36.1797
	coif3	1000x1000		106.0208	34.5485	107.176	36.2671
	coif1	1500x1500		270.1784	35.8075	254.0993	37.4139
	coif2	1500x1500		228.8178	36.0801	248.2521	37.9909
	coif3	1500x1500		228.9445	36.1269	249.1449	38.1368
	coif1	500x500	70	29.2534	28.6807	29.9068	29.5165
	coif2	500x500		29.189	28.9886	29.7219	29.9217
	coif3	500x500		29.3911	29.0436	29.0383	30.0207
	coif1	1000x1000		111.4223	31.8284	116.1268	33.1272
	coif2	1000x1000		110.7519	32.0611	116.3056	33.5929
	coif3	1000x1000		112.8067	32.2317	113.4887	33.6248
	coif1	1500x1500		252.4009	33.3965	272.1159	34.9906
	coif2	1500x1500		250.0976	33.7396	269.8985	35.4349
	coif3	1500x1500		248.6367	33.7419	269.278	35.5212
	coif1	500x500	85	31.7883	24.372	31.0198	24.3634
	coif2	500x500		34.2146	24.5996	31.4337	24.6993
	coif3	500x500		34.363	24.6193	29.9378	24.7052
	coif1	1000x1000		118.4883	25.9901	117.9579	26.5548
	coif2	1000x1000		120.2269	26.1421	122.811	26.8227
	coif3	1000x1000		116.4309	26.1986	124.7524	26.8559
	coif1	1500x1500		271.4238	26.7692	287.987	27.6016
	coif2	1500x1500		279.1937	26.8551	278.6759	27.6325
	coif3	1500x1500		292.7471	26.9083	272.3978	27.6418

Tabela 20: CT rekonstrukcija sa Coiflet familijom, TV minimizacija

25 iteracija, TV minimizacija				Pelvis		Kičma	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Symlets	sym1	500x500	40	24.5947	32.3228	27.9264	33.4001
	sym3	500x500		24.3599	33.34	25.8219	34.6308
	sym6	500x500		25.8465	33.5371	25.8825	35.0587
	sym1	1000x1000		100.1283	35.4508	102.0357	36.7439
	sym3	1000x1000		96.5146	36.3844	97.9426	37.8174
	sym6	1000x1000		97.3283	36.4097	97.9803	38.3262
	sym1	1500x1500		232.5678	37.0788	236.3216	38.2851
	sym3	1500x1500		219.8397	37.952	224.8611	39.802
	sym6	1500x1500		222.374	38.0937	226.087	40.1854
	sym1	500x500	55	26.6753	30.2743	28.5461	31.0755
	sym3	500x500		25.8808	31.2675	27.137	32.3201
	sym6	500x500		26.7624	31.2856	27.5391	32.7311
	sym1	1000x1000		108.446	33.5209	108.4628	34.6871
	sym3	1000x1000		101.0822	34.291	103.5095	36.0231
	sym6	1000x1000		101.8872	34.4305	104.3789	36.2768
	sym1	1500x1500		246.4504	35.0645	250.1156	36.4675
	sym3	1500x1500		234.3804	35.9723	239.8953	37.8456
	sym6	1500x1500		235.7171	36.1148	242.7154	38.0744
	sym1	500x500	70	28.3341	27.9536	30.2154	28.1205
	sym3	500x500		27.973	28.8981	29.9909	29.6014
	sym6	500x500		27.6781	29.0435	29.3719	29.6485
	sym1	1000x1000		112.8352	31.1612	112.3316	31.965
	sym3	1000x1000		109.4614	32.0062	109.3521	33.3267
	sym6	1000x1000		107.9514	32.1376	110.7035	33.6482
	sym1	1500x1500		254.1981	32.7172	261.4228	33.9256
	sym3	1500x1500		250.9058	33.5686	258.6938	35.3323
	sym6	1500x1500		254.4019	33.7701	262.5113	35.5601
	sym1	500x500	85	30.592	24.0087	31.8638	23.9109
	sym3	500x500		29.9582	24.3145	31.9254	24.3145
	sym6	500x500		30.2481	24.3893	32.0281	24.8169
	sym1	1000x1000		114.2473	25.7238	118.5746	25.6696
	sym3	1000x1000		115.9367	26.0196	117.8015	26.8208
	sym6	1000x1000		115.1586	26.143	118.5683	26.9803
	sym1	1500x1500		265.4923	26.5139	264.4991	26.9672
	sym3	1500x1500		263.0449	26.913	282.7961	27.5319
	sym6	1500x1500		264.6444	26.9316	271.9741	27.6386

Tabela 21: CT rekonstrukcija sa Symlet familijom, TV minimizacija

Slike rekonstrukcije su date slikom 5.17 gdje je korišćena 1000x1000 rezolucija sa ’sym6’ wavelet-om. Primjetno je da su ivice slika dobro očuvane, što je jenda od glavnih prednosti TV minimizacije.



(a) 55% oštećenja (b) Rekonstrukcija (c) 55% oštećenja (d) Rekonstrukcija

Slika 5.17: Primjeri CT rekonstrukcije koristeći TV minimizaciju

U naredne tri tabele (22-24) su dati rezultati CT rekonstrukcije u DWT domenu, koristeći ℓ_{21}-normu. Daubechies familija se ponaša slično kao i u slučaju TV minimizacije, od tri testirana wavelet-a, 'db5' daje najveći PSNR. Razlika je u ponašanju kada je oštećenje 85%, gdje sa ℓ_{21}-normom PSNR ima stalan pad, što nije bio slučaj sa TV minimizacijom. Coiflet familija da je stalan rast PSNR-a sa porastom rezolucije za sva oštećenja manja od 85%, dok za oštećenje od 85% ima blag pad sa porastom nestajućih momenata. Symlet familija je dala najkonzistentnije rezultate, jer PSNR ima stalan rast sa porastom rezolucije, bez obzira na oštećenje.

25 iteracija, ℓ_{21}-norma				**Pelvis**		**Kičma**	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Daubechies	db2	500x500	40	5.6116	33.3686	6.675	32.8458
	db5	500x500		5.5311	34.9327	6.7246	35.3646
	db8	500x500		5.4646	34.6021	6.272	32.6066
	db2	1000x1000		15.9673	37.6652	14.9231	37.8367
	db5	1000x1000		14.1751	40.7025	14.5207	38.7984
	db8	1000x1000		14.4336	40.2941	14.484	36.3685
	db2	1500x1500		36.2652	40.2283	37.8015	38.2419
	db5	1500x1500		36.226	42.9183	38.3138	40.6671
	db8	1500x1500		36.1308	42.7585	38.6834	38.524
	db2	500x500	55	6.2249	30.4385	5.8333	29.1097
	db5	500x500		5.2405	31.3568	8.0652	31.4505
	db8	500x500		5.3719	31.0639	6.9111	28.3879
	db2	1000x1000		13.3902	33.2249	14.9893	31.7119
	db5	1000x1000		13.7562	34.7063	16.6912	32.7557
	db8	1000x1000		14.2783	33.9644	15.6083	30.1975
	db2	1500x1500		36.0544	34.2644	38.5997	32.11
	db5	1500x1500		36.4692	35.4487	39.6154	32.8778
	db8	1500x1500		37.3452	34.6089	39.5173	31.341
	db2	500x500	70	5.9115	27.5761	6.5536	26.2183
	db5	500x500		6.2777	27.816	6.4658	27.058
	db8	500x500		6.1983	27.2062	6.1088	25.0886
	db2	1000x1000		13.3137	26.4526	14.7511	27.0627
	db5	1000x1000		15.0588	26.6684	15.4078	27.3177
	db8	1000x1000		15.3599	26.2161	15.1578	25.6564
	db2	1500x1500		36.3304	23.0757	37.9921	26.1316
	db5	1500x1500		36.2817	23.0477	39.0508	26.1565
	db8	1500x1500		37.6037	22.9514	39.4515	25.5139
	db2	500x500	85	6.5676	19.4191	7.0543	20.7888
	db5	500x500		5.8574	19.2971	7.0301	20.6674
	db8	500x500		6.1981	19.1719	6.687	20.1961
	db2	1000x1000		14.4335	16.4665	15.2847	18.1704
	db5	1000x1000		14.4799	16.3887	15.1294	18.1388
	db8	1000x1000		13.7605	16.3032	15.3922	17.8795
	db2	1500x1500		36.6103	15.1003	38.1606	16.6869
	db5	1500x1500		36.3085	15.0739	38.1612	16.6113
	db8	1500x1500		36.4828	15.06	38.2753	16.5345

Tabela 22: CT rekonstrukcija sa Daubechies familijom, ℓ_{21}-norma

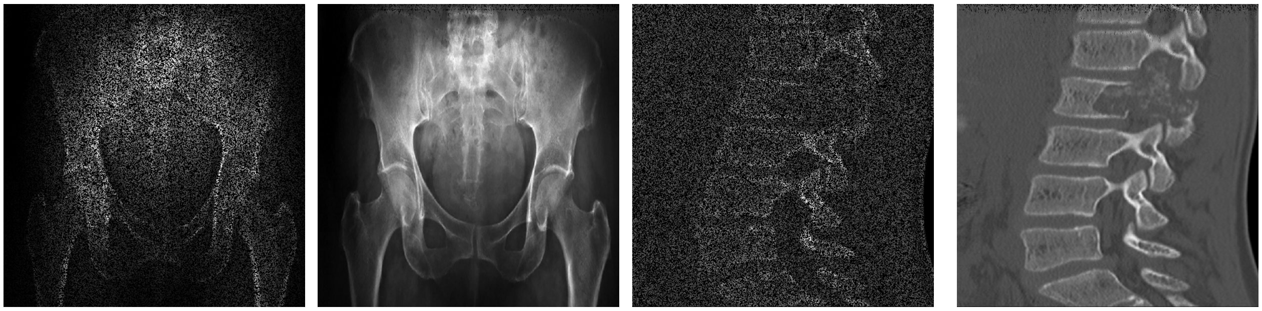
25 iteracija, ℓ_{21}-norma				Pelvis		Kičma	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Coiflets	coif1	500x500	40	5.1797	33.0282	6.6198	31.0571
	coif2	500x500		6.2635	33.8629	5.7344	32.3102
	coif3	500x500		5.4573	34.1268	6.0117	32.9991
	coif1	1000x1000		14.3387	37.4094	14.3402	35.4634
	coif2	1000x1000		14.2594	38.7278	14.5643	36.8932
	coif3	1000x1000		14.9941	39.4205	14.5717	37.2342
	coif1	1500x1500		36.1236	39.8553	37.1245	37.1589
	coif2	1500x1500		35.9065	41.0175	38.6134	38.573
	coif3	1500x1500		36.9743	41.0485	37.8757	39.0041
	coif1	500x500	55	5.2825	29.628	6.043	27.5044
	coif2	500x500		5.2698	30.2075	5.5837	28.1798
	coif3	500x500		5.4895	30.4448	6.1433	28.3536
	coif1	1000x1000		13.6309	32.5017	14.7889	29.7838
	coif2	1000x1000		14.5099	33.3791	16.7603	30.2956
	coif3	1000x1000		14.4831	33.5212	14.9826	30.4103
	coif1	1500x1500		36.3369	33.3403	37.2108	31.0107
	coif2	1500x1500		37.2499	33.8082	37.5444	31.6339
	coif3	1500x1500		36.8145	33.9312	37.1713	31.646
	coif1	500x500	70	5.8158	26.7408	5.9316	24.4304
	coif2	500x500		5.7445	27.1084	6.5813	24.6117
	coif3	500x500		6.3092	27.3562	6.0714	24.921
	coif1	1000x1000		13.792	26.0078	14.7714	25.6388
	coif2	1000x1000		14.185	26.1743	15.0118	25.8945
	coif3	1000x1000		14.6772	26.3244	14.6917	25.9092
	coif1	1500x1500		36.4438	22.9051	36.8266	25.5811
	coif2	1500x1500		36.6196	22.9213	37.3207	25.7639
	coif3	1500x1500		37.326	22.989	37.4866	25.7465
	coif1	500x500	85	5.578	19.295	6.0758	20.1605
	coif2	500x500		5.8826	19.351	5.992	20.306
	coif3	500x500		5.739	19.4278	6.0532	20.3107
	coif1	1000x1000		14.0461	16.4422	15.08	17.9601
	coif2	1000x1000		14.16	16.3852	14.279	17.9466
	coif3	1000x1000		14.1456	16.3309	14.8827	17.9008
	coif1	1500x1500		37.1867	15.107	37.4258	16.5856
	coif2	1500x1500		36.7471	15.0929	37.7802	16.5692
	coif3	1500x1500		36.5435	15.0772	37.28	16.5525

Tabela 23: CT rekonstrukcija sa Coiflet familijom, ℓ_{21}-norma

25 iteracija, ℓ_{21}-norma				Pelvis		Kičma	
Wavelet familija	**Wavelet tip**	**Rezolucija**	**Nedostajući pikseli (%)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**	**Vrijeme (s)**	**PSNR (dB)**
Symlets	sym1	500x500	40	7.3531	33.2261	5.6617	32.0295
	sym3	500x500		6.3523	33.9381	5.4662	32.0399
	sym6	500x500		7.1719	34.0422	5.6069	33.7953
	sym1	1000x1000		14.1388	37.1362	13.7869	35.6839
	sym3	1000x1000		14.6337	38.499	15.1159	36.3094
	sym6	1000x1000		15.3521	38.6042	14.4374	37.5863
	sym1	1500x1500		38.4633	39.2381	37.2981	37.2633
	sym3	1500x1500		40.3939	40.7042	37.4127	38.2568
	sym6	1500x1500		37.6691	40.7332	36.9	38.7814
	sym1	500x500	55	7.0551	30.0231	6.206	28.8845
	sym3	500x500		6.1306	30.1571	5.5285	28.9601
	sym6	500x500		5.9617	30.6364	5.8631	28.9883
	sym1	1000x1000		14.3826	33.0001	14.4143	31.1159
	sym3	1000x1000		14.8429	33.1401	14.7298	31.2017
	sym6	1000x1000		15.9468	33.4415	14.8882	31.4581
	sym1	1500x1500		38.6305	33.2304	37.0543	31.5379
	sym3	1500x1500		39.6261	33.6786	37.5889	31.5963
	sym6	1500x1500		38.9292	33.9997	36.8254	31.7941
	sym1	500x500	70	5.7841	26.4929	5.5853	26.1846
	sym3	500x500		6.273	26.8713	5.8214	26.2015
	sym6	500x500		6.1475	27.2563	5.5873	26.2647
	sym1	1000x1000		14.5816	25.5288	14.0961	26.399
	sym3	1000x1000		15.6182	26.0591	14.3081	26.4443
	sym6	1000x1000		15.5238	26.3053	14.8027	26.5535
	sym1	1500x1500		37.9395	22.5036	36.6779	25.1291
	sym3	1500x1500		39.7869	22.957	37.2069	25.6257
	sym6	1500x1500		38.0939	22.9603	36.7418	25.7858
	sym1	500x500	85	8.1038	18.5845	5.732	20.7473
	sym3	500x500		8.3847	19.1962	6.2113	20.806
	sym6	500x500		7.5702	19.3359	5.7468	20.8788
	sym1	1000x1000		14.3296	16.2069	14.0991	18.0308
	sym3	1000x1000		14.3732	16.364	14.6266	18.0512
	sym6	1000x1000		14.4158	16.3703	14.4584	18.099
	sym1	1500x1500		37.4207	14.9932	36.851	16.4816
	sym3	1500x1500		37.3353	15.0958	36.7911	16.5435
	sym6	1500x1500		39.6071	15.0977	37.2167	16.6042

Tabela 24: CT rekonstrukcija sa Symlet familijom, ℓ_{21}-norma

Slike rekonstrukcije su date slikom 5.18. Svi parametri definisani za sliku 5.17 važe i za sliku 5.18.



(a) 55% oštećenja (b) Rekonstrukcija (c) 55% oštećenja (d) Rekonstrukcija

Slika 5.18: Primjeri CT rekonstrukcije koristeći ℓ_{21}-normu

Kao i u slučaju TV minimizacije, sve tri familije su sa ℓ_{21}-normom dale približno iste međusobne rezultate. Rezultati sa TV minimizacijom su bolji, posebno kada je u pitanju veće oštećenje od 70% i 85%, gdje je razlika u odnosu na ℓ_{21}-normu oko 10 dB. Kao i u slučaju MRI i X-ray rekonstukcije, vremensko izvršavanje ADMM pristupa sa ℓ_{21}-normom je mnogostruko brže u odnosu na TV minimizaciju.

6 Zaključak

U teorijskom dijelu ovoga rada je predstavljen i objašnjen koncept kompresivnog odabiranja, neophodnih preduslova koje određeni signal treba da zadovolji da bi kompresivno odabiranje bilo uspješno, kao i uspješnost i neophodnost primjene jednog takvog koncepta u raznim oblastima.

Jedna od oblasti u kojima kompresivno odabiranje ima široku primjenu jeste medicina. U ovom radu je koncept kompresivnog odabiranja primijenjen nad oštećenim biomedicinskim slikama (MRI, X-ray i CT). Od velikog broja algoritama i pristupa koji rješavaju problem kompresivnog odabiranja, u ovoj tezi je korišćen ADMM pristup, koji je prilagođen da bi radio sa biomedicinskim slikama, a koji je naširoko korišćen u mašinskom učenju i statistici.

Kod ADMM pristupa su korišćena dva optimizaciona algoritma: TV minimizacija i ℓ_{21}-norma, u kombinaciji sa dva transformaciona domena: DCT i DWT, gdje su kod DWT domena bile posmatrane Daubechies, Coiflet i Symlet familije.

Na osnovu teorijskih očekivanja i praktičnih rezultata iz petog poglavlja, mogu se izvesti zaključci o primjeni ADMM pristupa kod biomedicinskih slika:

- **MRI rekonstrukcija.** Kada je u pitanju DCT domen, za niža oštećenja do 55%, ℓ_{21}-norma je dala veći PSNR u odnosu na TV minimizaciju, dok je za oštećenja viša od 70% veći PSNR dala TV minimzacija. ADMM pristup je u kombinaciji sa TV minimizacijom bio mnogo vremenski zahjevniji nego sa ℓ_{21}-normom. Kod DWT domena, sve tri testirane familije wavelet-a su dale približno iste rezultate, koji su u prosjeku bili malo bolji u odnosu na slučaj sa DCT domenom. Za veća oštećenja korišćenje TV minimzacije je sačuvalo ivice slike, posebno sa DWT domenom, što nije slučaj kod ℓ_{21}-norme.

- **X-ray rekonstrukcija.** TV minimizacija kod DCT domena je generalno dala bolje i konzistentnije rezultate u odnosu na ℓ_{21}-normu. Kao i u slučaju MRI rekonstrukcije, vremensko izvršavanje ℓ_{21}-norme je mnogo brže u odnosu na vrijeme izvršavanja TV minimizacije. DWT domen je sa TV minimizacijom i svoje tri wavelet familije dao rezultate slične kao TV minimizacija sa DCT domenom. Uopšteno gledajući, rezultati koristeći TV minimizaciju su bili bolji bez obzira na domen. Za velika oštećenja slika (85%), rezultati sa ℓ_{21}-normom su dali jako loše rezultate.

- **CT rekonstrukcija.** Za niža oštećenja, ℓ_{21}-norma je sa DCT domenom dala bolje rezultate nego sa TV minimizacijom, dok je TV minimizacija dala bolji PSNR kada je slučaj sa velikim oštećenjima. Analogno svim prethodnim slučajevima, vrijeme izvršavanja ADMM pristupa sa ℓ_{21}-normom je daleko brže u odnosu na TV minimizaciju. Kod DWT domena, sve tri familije wavelet-a su dale međusobno bliske rezultate, s time što u slučaju većih oštećenja PSNR ima stalan pad kada se koristi ℓ_{21}-norma.

Uzevši u obzir sve navedeno, sveopšti zaključak bi bio da je ADMM prisup bio uspješan pri rekonstrukciji biomedicinskih slika. Posebno dobre rezultate za velika oštećenja slika je dao u kombinaciji sa TV minimizacijom. Navedena varijanta jeste dala najbolje i najuravnoteženije vrijednosti PSNR-a po štetu vremena jer je brzina izvršavanja sa ℓ_{21}-normom bila neuporedivo brža.

Glavni doprinos ovoga rada i sprovedene analize se ogleda u činjenici da pacijenti ne moraju dugo vremena biti izloženi neprijatnom i potencijalno zdravstveno riskantnom procesu, već da se taj proces može drastično skratiti, jer je ADMM pristup bio u stanju da jako uspješno rekonstruiše sliku sa velikim stepenom oštećenja. Samim tim, generisane biomedicinske slike ne moraju biti naročitog kvaliteta, mogu biti i jako oštećene. U zavisnosti od hitnosti situacije u kojoj se pacijent može naći, određeno balansiranje kvaliteta rekonstruisanih slika i vremena neophodnog za njihovu rekonstrukciju se mora obaviti.

Literatura

[1] Y. C. Eldar and G. Kutyniok, "Compressed Sensing: Theory and Applications," Cambridge University Press, May 2012

[2] S. Stanković, I. Orović and E. Sejdić, "Multimedia Signals and Systems; Basic and Advanced Algorithms for Signal Processing," Second Edition (2015)

[3] I. Orović, V. Papić, C. Ioana, X. Li, and S. Stanković, "Compressive Sensing in Signal Processing: Algorithms and Transform Domain Formulations," Mathematical Problems in Engineering, Review paper, 2016

[4] LJ. Stanković, E. Sejdić, S. Stanković, M. Daković, and I. Orović, "A Tutorial on Sparse Signal Reconstruction and its Applications in Signal Processing," Circuits, Systems and Signal Processing, (2019) vol. 38, pp.1206–1263, DOI 10.1007/s00034-018-0909-2.

[5] Foucart, Simon and Holger Rauhut. "A Mathematical Introduction to Compressive Sensing," Applied and Numerical Harmonic Analysis (2013).

[6] Holger Boche, Robert Calderbank, Gitta Kutyniok, and Jan Vybral. 2016. Compressed Sensing and its Applications: MATHEON Workshop 2013 (1st. ed.). Birkhauser Basel.

[7] H.Taylor, S. Banks, and J. McCoy, "Deconvolution with l1 norm", Geophysics, 44(1):39-52, 1979

[8] Yi Yang, Heng Tao Shen, Zhigang Ma, Zi Huang, and Xiaofang Zhou, "L2,1-norm regularized discriminative feature selection for unsupervised learning" , 2011, In Proceedings of the Twenty-Second international joint conference on Artificial Intelligence - Volume Volume Two (IJCAI'11). AAAI Press, 1589–1594.

[9] I. Orović, A. Draganić, and S. Stanković, "Compressive Sensing as a Watermarking Attack," 21st Telecommunications Forum TELFOR 2013, Belgrade

[10] A. Draganić, I. Orović, and S. Stanković, "Total variation based denoising of wireless signals," Informacione Tehnologije - IT 2013, Žabljak, Feb. 2013

[11] Manolis Lourakis (2022). TV-L1 Image Denoising Algorithm (https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/57604-tv-l1-image-denoising-algorithm), MATLAB Central File Exchange. Retrieved December 8, 2022.

[12] Vivek Upadhyaya and Dr. Mohammad Salim, "Compressive Sensing: Methods, Techniques, and Applications", 2021 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 1099 012012 DOI 10.1088/1757-899X/1099/1/012012

[13] A. Draganić, I. Orović, and S. Stanković, "On some common compressive sensing recovery algorithms and applications - Review paper," Facta Universitatis, Series: Electronics and Energetics, Vol 30, No 4 (2017), pp. 477-510, DOI Number 10.2298/FUEE1704477D, December 2017

[14] Sundararajan D. The Discrete Fourier Transform : Theory Algorithms and Applications. Singapore: World Scientific; 2001. http://site.ebrary.com/id/10255910.

[15] "Discrete Fourier Transform" , https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/discrete-fourier-transform (accessed Nov. 17, 2022)

[16] Islam, Saiful and Islam, Md. (2019). A Comparative Study on Discrete Fourier Transformation for Digital Signal Analysis. 01. 18-26.

[17] Akansu, Ali N.; Agirman-Tosun, Handan "Generalized Discrete Fourier Transform With Nonlinear Phase", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 58, no. 9, pp. 4547–4556, Sept. 2010.

[18] Chu, Eleanor. (2008). Discrete and Continuous Fourier Transforms: Analysis, Applications and Fast Algorithms. 10.1201/9781420063646.

[19] Steven W. Smith "The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing", California technical Publishing, 1999

[20] Ochoa-Dominguez, Humberto; Rao, K. R. , "Discrete Cosine Transform" , Second Edition. CRC Press. (2019) ISBN 9781351396486.

[21] Britanak, Vladimir; Rao, K. R. , "Cosine-/Sine-Modulated Filter Banks: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations" , (2017), Springer. p. 478. ISBN 9783319610801.

[22] Rao, K. R. and Patrick C. Yip. "Discrete Cosine Transform - Algorithms, Advantages, Applications", (1990).

[23] Ruch D. , van Fleet PJ , "Wavelet theory: an elementary approach with applications" , John Wiley and Sons, Hoboken, NJ (2009)

[24] Percival DB, Walden AT , "Wavelet methods for time series analysis" , Cambridge University Press, Cambridge, (2006)

[25] D. Lee Fugal, "Conceptual wavelets in digital signal processing: an in-depth, practical approach for the non-mathematician" , Space and Signals Technical Pub, 2009

[26] Jean Baptiste Tary, Roberto Henry Herrera and Mirko van der Baan, "Analysis of time-varying signals using continuous wavelet and synchrosqueezed transforms", Research article, The Royal Society Publishing, 2018

[27] Radunović D. , "Wavelets from math to practice" , Springer-Verlag, Berlin, Academic mind, Belgrade, (2009)

[28] Daubechies I. , "Ten Lectures On Wavelets" , CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999

[29] Dong Wei, Alan C. Bovik, and Brian L. Evans, "Generalized Coiflets: A New Family of Orthonormal Wavelets" , Laboratory for Image and Video Engineering, Department of Electrical and Computer Engineering, The University of Texas at Austin, Austin, TX 78712-1084 USA

[30] Lema-Condo, Efren and Bueno-Palomeque, Freddy and Castro-Villalobos, Susana and Ordonez-Morales, Esteban and Serpa, Luis. , "Comparison of wavelet transform symlets (2-10) and daubechies (2-10) for an electroencephalographic signal analysis" , (2017) , 1-4. 10.1109/INTERCON.2017.8079702.

[31] Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim, Jean-Michel Poggi , “Wavelet Toolbox 4 User’s Guide”, 1997

[32] Gang Huang; Hong Jiang; Kim Matthews; Paul Wilford , “Lensless Imaging by Compressive Sensing” , 2013 IEEE International Conference on Image Processing. Vol. 2393. pp. 2101–2105.

[33] Brady, David; Choi, Kerkil; Marks, Daniel; Horisaki, Ryoichi; Lim, Sehoon , “Compressive holography”, (2009), Optics Express. 17 (15): 13040–13049.

[34] Musyyab Yousufi, Muhammad Amir, Umer Javed, Muhammad Tayyib, Suheel Abdullah, Hayat Ullah, Ijaz Mansoor Qureshi, Khurram Saleem Alimgeer, Muhammad Waseem Akram, Khan Bahadar Khan, “Application of Compressive Sensing to Ultrasound Images: A Review”, BioMed Research International, vol. 2019, Article ID 7861651, 14 pages, 2019. https://doi.org/10.1155/2019/7861651

[35] Vivek Upadhyaya, Mohammad Salim, “Compressive Sensing: Methods, Techniques, and Applications” , 2021 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 1099 012012 DOI 10.1088/1757-899X/1099/1/012012

[36] Huang HK. “Biomedical image processing” , Crit Rev Bioeng. 1981;5(3):185-271. PMID: 7023828.

[37] McRobbie DW , “MRI from picture to proton” , Cambridge, UK; New York: Cambridge University Press, (2007), ISBN 978-0-521- 68384-5

[38] Catherine Westbrook, John Talbot, “MRI in Practice” , 5th Edition, Wiley-Blackwell, August 2018, ISBN: 978-1-119-39200-2

[39] “Magnetic Resonance Imaging (MRI)”, https://www.nibib.nih.gov/science-education/science-topics/magnetic-resonance-imaging-mri (accessed Jan. 03, 2023)

[40] Stark, Glenn. “X-ray” , Encyclopedia Britannica, 5 Dec. 2022, https://www.britannica.com/science/X-ray. Accessed 06 January 2023.

[41] Russo, P. (Ed.), “Handbook of X-ray Imaging: Physics and Technology“, (1st ed.), CRC Press. (2017), https://doi.org/10.1201/9781351228251

[42] “X-rays” , https://www.nibib.nih.gov/science-education/science-topics/x-rays (accessed Jan. 06, 2023)

[43] Euclid Seeram, “Computed Tomography-Physical Principles, Patient Care, Clinical Applications, and Quality Control” , ISBN: 9780323790635, June 16, 2022

[44] “Computed Tomography (CT)”, https://www.nibib.nih.gov/science-education/science-topics/computed-tomography-ct (accessed Jan. 10, 2023)

[45] LJ. Stanković, M. Daković, and S. Vujović, “Adaptive Variable Step Algorithm for Missing Samples Recovery in Sparse Signals,” IET Signal Processing, vol. 8, no. 3, pp. 246 -256, 2014, DOI: 10.1049/iet-spr.2013.0385

[46] Lj. Stanković, M. Daković, ”On a Gradient-Based Algorithm for Sparse Signal Reconstruction in the Signal/Measurements Domain”, Mathematical Problems in Engineering, vol. 2016, Article ID 6212674, 11 pages, 2016. https://doi.org/10.1155/2016/6212674

[47] V.M. Patel and R. Chellappa, “Sparse Representations and Compressive Sensing for Imaging and Vision,” SpringerBriefs in Electrical and Computer Engineering, 2013

[48] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein. “Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers”, Foundations and Trends in Machine Learning, 3(1):1–122, 2011

[49] Neal Parikh, Stephen Boyd, “Proximal Algorithms”, Foundations and Trends in Optimization, Vol. 1, No. 3 (2013) 123–231

[50] Han, DR. “A Survey on Some Recent Developments of Alternating Direction Method of Multipliers” , J. Oper. Res. Soc. China 10, 1–52 (2022). https://doi.org/10.1007/s40305-021-00368-3

[51] Zhouchen Lin, Huan Li, Cong Fang , “Alternating Direction Method of Multipliers for Machine Learning”, Springer Singapore, 2022

[52] A. Maneesha and K. Shanti Swarup, “A survey on applications of Alternating Direction Method of Multipliers in smart power grids”, Renewable and Sustainable Energy Reviews, Volume 152, December 2021, 111687

[53] Daniel P. Robinson and Rachael Tappenden, “A Flexible ADMM Algorithm for Big Data Applications”, Journal of Scientific Computing volume 71, 435–467 (2017)

[54] Jincheng Li, Jinlan Li, Zhaoyang Xie and Jian Zou, “Plug-and-Play ADMM for MRI Reconstruction With Convex Nonconvex Sparse Regularization” , IEEE Access (Volume: 9) November 2021

[55] Ji He, Yan Yang, Yongbo Wang, Dong Zeng, Zhaoying Bian, Hao Zhang, Jian Sun, Zongben Xu and Jianhua Ma, “Optimizing a Parameterized Plug-and-Play ADMM for Iterative Low-Dose CT Reconstruction” , IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 38, no. 2, pp. 371-382, Feb. 2019, doi: 10.1109/TMI.2018.2865202.

Prilog

Kod za sliku 2.1, Signal u vremenskom i DCT domenu

```
N = 128;
t =0:0.2:N;
f1=8/N;
f2 = 20/N;
x = 7 + 4*cos(2*pi*t*f1)- 2*cos(2*pi*t*f2);

y=dct(x);

figure
plot(t,x)
xlabel('Vrijeme');

figure

plot(y,'r','LineWidth',2)
xlabel('Frekvencija');
```

Kod za sliku 2.2, Wavelet transformacija

```
slika = imread('C:\Users\Korisnik\Desktop\Lena.jpg');
S = im2double(slika);

wv = 'db10';
[cA1,cH1,cV1,cD1] = dwt2(S,wv);
sx = size(S);
A1 = idwt2(cA1,[],[],[],wv,sx);
H1 = idwt2([],cH1,[],[],wv,sx);
V1 = idwt2([],[],cV1,[],wv,sx);
D1 = idwt2([],[],[],cD1,wv,sx);

```

```
figure
subplot(2,2,1)
image(wcodemat(A1,192))
title('Aproksimacija')
subplot(2,2,2)
image(wcodemat(H1,192))
title('Horizontalni detalji')
subplot(2,2,3)
image(wcodemat(V1,192))
title('Vertikalni detalji')
subplot(2,2,4)
image(wcodemat(D1,192))
title('Dijagonalni detalji')
```

Kod za sliku 2.7, DFT

```
Ts = 1/30;
t = 0:Ts:10;
x = sin(2*pi*4*t) + sin(3*pi*7*t);
figure
plot(t,x)
xlabel('Vrijeme (s)')
ylabel('Amplituda')

y = fft(x);
fs = 1/Ts;
f = (0:length(y)-1)*fs/length(y);
figure
plot(f,abs(y))
xlabel('Frekvencija (Hz)')
ylabel('Magnituda')
```

Kod za sliku 2.8, DCT

```
slika = imread('kids.tif');
I= imresize(slika,[256 256]);
I = im2double(I);
C = dctmtx(8);
dct = @(block_struct) C * block_struct.data * C';
D1 = blockproc(I,[8 8],dct);
matrix = [1 1 1 1 1 0 0 0
          1 1 1 1 0 0 0 0
          1 1 1 0 0 0 0 0
          1 0 0 0 0 0 0 0
          0 0 0 0 0 0 0 0
          0 0 0 0 0 0 0 0
          0 0 0 0 0 0 0 0
          0 0 0 0 0 0 0 0];
D2 = blockproc(D1,[8 8],@(block_struct) matrix .* block_struct.
    data);
invdct = @(block_struct) C' * block_struct.data * C;
I2 = blockproc(D2,[8 8],invdct);
imshow(I)
figure
imshow(I2)
```

Kod za sliku 2.10, Wavelet denoiser

```
rng default;
[X,XN] = wnoise('bumps',11,3.5);
subplot(211)
plot(X); title('Originalni signal');
AX = gca;
AX.YLim = [0 12];
subplot(212)
plot(XN); title('Signal sa šumom');
```

```
AX = gca;
AX.YLim = [0 12];
xd = wdenoise(XN,4);
figure;
plot(X,'blue','LineWidth',1.5)
hold on;
plot(xd,'red','LineWidth',1.5)
legend('Originalni signal','Rekonstruisani signal','Location','
    NorthEast')
axis tight;
hold off;
```